

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ



ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ
З ДИСЦИПЛІНИ
«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»,
ЧАСТИНА I

(для студентів усіх форм навчання та слухачів другої вищої освіти
напрямків 6.050701 «Електротехніка та електротехнології»,
6.050702 «Електромеханіка»)

Харків ХНАМГ 2007

Текст лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки», частина І (для студентів усіх форм навчання та слухачів другої вищої освіти напрямків 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.050702 «Електромеханіка») / Форкун Я.Б., Самошкін В.П., Капустін Г.В., Юрченко С.М.; Хark. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 70 с.

Автори: доц., к.т.н. Я.Б. Форкун,
доц., к.т.н. В.П. Самошкін,
доц., к.т.н. Г.В. Капустін,
ст. викл. С.М. Юрченко

Рецензент: проф., д.т.н. А.Г. Сосков

**Рекомендовано кафедрою електротехніки,
протокол № 11 від 22.06. 2007 р.**

Зміст

ВСТУП	5
Розділ 1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.	6
1.1. Електричне коло, електрична схема та їх елементи	6
1.2. Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки)	7
1.3. Основні поняття, що характеризують електричні схеми.	
Лінійні й нелінійні електричні кола, розгалужені й нерозгалужені	8
1.4. Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола	9
1.5. Закони Кірхгофа	9
1.6. Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму	10
1.7. Потенціальна діаграма	11
1.8. Метод контурних струмів	11
1.9. Метод вузлових потенціалів	13
1.10. Заміна кількох паралельних віток, що містять ЕРС та опори, однією еквівалентною віткою	15
1.11. Основні властивості електричних кіл постійного струму (Поняття вхідних і взаємних провідностей. Принцип взаємності. Теорема компенсації. Принцип накладання і метод накладання. Принцип лінійності)	16
1.12. Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник опорів	18
1.13. Двополюсник. Теорема про еквівалентний генератор. Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці	19
1.14. Передача енергії від активного двополюсника до навантаження	21
1.15. Передача енергії по лініям передачі	22
Розділ 2. СИНУСОЇДНИЙ СТРУМ	24
2.1. Основні величини, що характеризують синусоїдний струм	24
2.2. Синусоїдний струм активного опору	25
2.3. Синусоїдний струм індуктивності	26
2.4. Синусоїдний струм ємності	27
2.5. Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму	28
2.6. Потужність в колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна)	29
2.7. Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл	30
2.8. Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами	32
2.9. Символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму	33
2.10. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі	33
2.11. Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю	

ділянки кола	35
2.12. Комплексна форма запису потужності. Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму	35
2.13. Векторні й топографічні діаграми	36
2.14. Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження	37
2.15. Резонанс у послідовному коливальному контурі	38
2.16. Резонанс у паралельному коливальному контурі	40
2.17. Практичне застосування резонансу	42
Розділ 3. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ	
3.1. Основні поняття і класифікація	43
3.2. Основні рівняння чотириполюсника	44
3.3. Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника (шляхом розрахунку та досліду)	46
3.4. Схеми заміщення пасивного чотириполюсника	49
3.5. Годографи (кругові й лінійні діаграми)	50
Розділ 4. ТРИФАЗНІ КОЛА	54
4.1. Основні поняття і визначення	54
4.2. Основні схеми з'єднання трифазних кіл. Визначення лінійних і фазних величин	55
4.3. Розрахунок трифазних кіл	59
4.4. Аварійні режими в трифазних колах	63
Розділ 5. КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ	66
5.1. Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності	66
5.2. Розрахунок електричних кіл за наявності в них магнітозв'язаних котушок	67
5.3. Визначення взаємної індуктивності	68
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	69

Вступ

Електротехнікою називається широка область практичного застосування електромагнітних явищ. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) - дисципліна, що займається питаннями розрахунку та вивчення явищ, які характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукцією магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою усіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Завдання дисципліни:

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл та співвідношенням між електричними величинами в електричних та магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;
- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного і несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії і методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії і методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами;
- ознайомити з основними законами і методами розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму.

Предметом вивчення дисципліни є основні закони теорії електричних кіл, теорії електромагнітного поля та оволодіння навичками їх практичного застосування для дослідження і розрахунків сучасних електротехнічних пристроїв.

Вивчення курсу "Теоретичні основи електротехніки" потребує знання курсів фізики, а саме розділу "Електрика та магнетизм", і особливо математики, передусім розділів: системи лінійних алгебраїчних рівнянь, теорія матриць, похідна і інтеграл, диференціальні рівняння, функціональні ряди, інтегральні перетворення Лапласа, векторна алгебра. Теоретичні положення курсу засвоюються ґрунтовно тільки тоді, коли вони використані для вирішення конкретних задач. Саме тому в методичних вказівках для кращого засвоєння теоретичного матеріалу наведено ряд розв'язаних прикладів.

Розділ 1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1. Електричне коло, електрична схема та їх елементи

Електричне коло – сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу і взаємного перетворення електромагнітної та інших видів енергії та інформації, якщо процеси, що відбуваються у пристроях, можуть бути описані за допомогою понять про електрорушійну силу (ЕРС), струм та напругу.

Основні елементи електричного кола:

- джерела електричної енергії – пристрої, що перетворюють механічну, теплову, хімічну та інші види енергії в електромагнітну (генератор, акумуляторна батарея та ін.);
- перетворювачі електромагнітної енергії (трансформатори, перетворювачі частоти та ін.);
- пристрої передачі електромагнітної енергії (лінії передачі);
- споживачі електромагнітної енергії, що перетворюють електромагнітну енергію в механічну, теплову, хімічну та інші види (двигуни, лампи розжарювання, резистори та ін.).

Кожна група - це безліч різних приладів, що відрізняються за принципом дії, конструкцією тощо.

Іншими словами, *електричне коло* – сукупність джерел та споживачів електромагнітної енергії, з'єднаних проводами, по яких може протікати електричний струм.

Кола, в яких процеси отримання електричної енергії в джерелах, передача та перетворення в споживачах відбуваються при незмінних у часі струмах та напругах, називаються *колами постійного струму*.

У курсі ТОЕ електричне коло замінюють моделлю (графічним зображенням), яка називається *електричною схемою*. Елементами електричної схеми є *активні й пасивні* елементи.

До пасивних елементів (аналог споживачів електромагнітної енергії) відносять (рис.1.1):

- опір, [Ом] - ідеалізований елемент, що приблизно замінює резистор, в якому відбувається перетворення електричної енергії в теплову;
- ємність, [Ф] - ідеалізований елемент, який приблизно замінює конденсатор, в якому накопичується енергія електричного поля;
- індуктивність [Гн] - ідеалізований елемент, який приблизно замінює котушку індуктивності, в якій може накопичуватися енергія магнітного поля.

До активних елементів (аналог джерел електромагнітної енергії) відносять джерела електрорушійної сили та джерела струму.

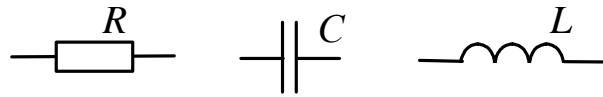


Рис.1.1 - Умовні позначення опора, ємності та індуктивності

1.2. Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки)

Джерела енергії є причиною виникнення струмів і напруг в електричних колах.

Для аналізу електричних кіл використовують поняття ідеалізованих джерел напруги та струму.

Під ідеалізованим *джерелом напруги* розуміють таке джерело, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через нього і яке характеризують тільки електрорушійною силою E (рис.1.2,а). Якщо джерело напруги не ідеалізоване, то воно має внутрішній опір R_0 , тому напруга на затискачах залежить від величини струму, що протікає через нього (рис.1.2,б; де m_U , m_I - масштаби по напрузі та струму вольт-амперної характеристики джерела).

Під ідеалізованим *джерелом струму* розуміють таке джерело енергії, сила струму якого j не залежить від навантаження, до якого це джерело під'єднане (внутрішній опір такого джерела $R_0 \rightarrow \infty$). Умовне позначення ідеалізованого джерела струму та його вольт-амперна характеристика (ВАХ) представлені на рис.1.3.

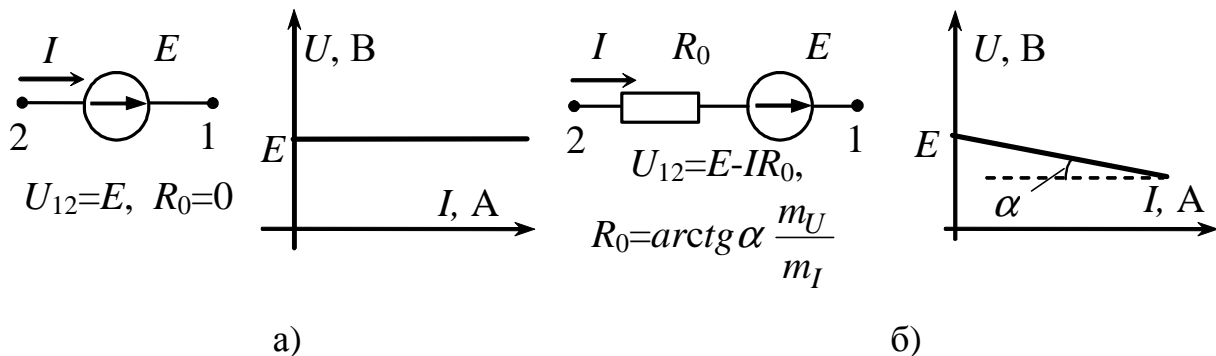


Рис.1.2.

Фізично виконати ідеалізовані джерела струму та напруги неможливо.

При розрахунку електричних кіл реальне джерело напруги з ЕРС E_0 та внутрішнім опором R_0 , що з'єднане з навантаженням, може бути представлено двома способами (рис.1.4,а і рис.1.4,б). Ці схеми еквівалентні щодо потужності, яка споживається навантаженням, і нееквівалентні щодо потужності, яка споживається внутрішнім опором R_0 . Для схеми рис.1.4, а:

$$E = U_H + I_H \cdot R_0; \quad (1.1)$$

$$\frac{E}{R_0} = \frac{U_H}{R_0} + I_H. \quad (1.2)$$

$$\text{Позначимо: } \frac{E}{R_0} = j \text{ і } \frac{U_H}{R_0} = I_0. \quad (1.3)$$

З урахуванням (1.3):

$$j = I_0 + I_H, \quad (1.4)$$

а цьому рівнянню відповідає схема рис.1.4, б. Формула

$$\frac{E}{R_0} = j \quad (1.5)$$

застосовується для переходу від реального джерела напруги до реального джерела струму (і навпаки).

У відношенні енергії, що споживається внутрішнім опором R_0 , ці схеми нееквівалентні, тобто для рис.1.4,а - $P_0 = I_H^2 \cdot R_0$, а для рис.1.4,б - $P_0 = I_0^2 \cdot R_0$.

Потужність, що споживається опором навантаження R_H , для обох схем однакова:

$$P_H = I_H^2 \cdot R_H. \quad (1.6)$$

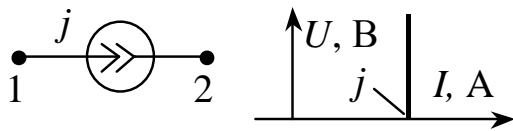
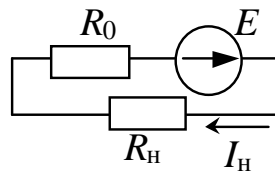
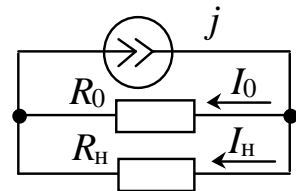


Рис.1.3.



а)



б)

Рис.1.4.

1.3. Основні поняття, що характеризують електричні схеми.

Лінійні й нелінійні електричні кола, розгалужені й нерозгалужені

Лінійні електричні кола – кола, всі елементи яких лінійні (резистор, ємність, індуктивність), тобто мають лінійні вольт-амперні характеристики. Якщо коло має хоча б один нелінійний елемент (діод, стабілітрон, лампа розжарювання та ін.) – то воно *нелінійне*.

Основними поняттями, що характеризують електричні схеми є *вітка*, *вузол*, *контур*.

Вітка – ділянка кола, вздовж якої протікає один і той же струм; утворюється вітка кількома послідовно з'єднаними елементами

Вузол – точка на схемі, де з'єднуються три і більше вітки. *Вітки*, приєднані до одних і тих самих вузлів, називаються паралельними.

Контур – будь-який замкнутий шлях, що проходить по декількох вітках.

Розгалуженим колом зветься коло, що має три і більше вітки, два і більше вузлів.

Нерозгалуженим колом називається коло, що має тільки один контур (не має вузлів).

1.4. Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола

Напруга на ділянці кола – це різниця потенціалів точок (ϕ) між крайніми

точками цієї ділянки. За визначенням: $U_{ab} = \phi_a - \phi_b$. (1.7)

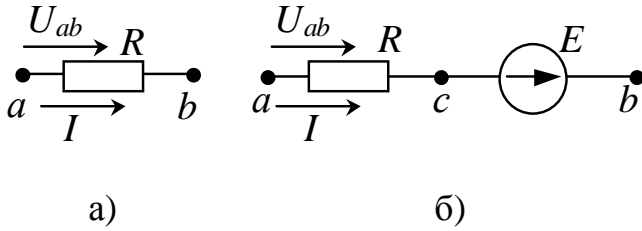


Рис.1.5

При протіканні через опір R струму I : $\phi_a > \phi_b$ на величину падіння напруги в опорі R , тобто

$$\phi_a = \phi_b + I \cdot R, \quad (1.8)$$

$$\text{або } U_{ab} = \phi_a - \phi_b = I \cdot R. \quad (1.9)$$

Таким чином: закон Ома для ділянки кола, що не має у своєму складі ЕРС (рис.1.5,а):

$$I = \frac{U_{ab}}{R}. \quad (1.10)$$

Розглянемо ділянку кола, що має у своєму складі ЕРС (рис.1.5,б). Для цього кола справедливими будуть вирази:

$$\left. \begin{aligned} U_{ab} &= \phi_a - \phi_b \\ \phi_a &= \phi_c + I \cdot R \\ \phi_c &= \phi_b - E \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi_a - \phi_b = \phi_c + I \cdot R - \phi_c - E. \quad (1.11)$$

$$\text{З попереднього виразу: } U_{ab} = I \cdot R - E. \quad (1.12)$$

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що має у своєму складі ЕРС (рис.1.5, б) має вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R}. \quad (1.13)$$

Якщо ділянка кола має у своєму складі кілька ЕРС, спрямованих у різні сторони, а також кілька опорів, то закон Ома матиме вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} \pm E_i}{\sum R_i}. \quad (1.14)$$

Примітка: коли напрямки ЕРС E_i і напруги U_{ab} збігаються з напрямком струму I в ділянці « ab », то в чисельнику беремо E_i і напругу U_{ab} зі знаками "+", і навпаки.

1.5. Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду: алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі, в будь який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (1.15)$$

де k – номери віток, які зв'язані з даним вузлом. Якщо струм спрямований до вузла, то він входить у рівняння (1.15) зі знаком "+".

Другий закон Кірхгофа виражає закон збереження енергії: алгебраїчна сума напруг ділянок замкнутого контуру дорівнює нулю в будь-який момент часу:

$$\sum_{i=1}^m U_i = 0, \quad (1.16)$$

де i – номер ділянки, що входить у контур.

Частіше використовують інше формулювання другого закону Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг уздовж контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС вздовж цього ж контуру (знаки ЕРС або падінь напруг залежать від їх напрямків і обраних напрямків обходу контурів).

За першим законом Кірхгофа для схеми треба складати $n-1$ рівнянь, де n – кількість вузлів у схемі.

За другим законом Кірхгофа треба складати $(m-n+1)$ рівнянь, де m – кількість віток у схемі з невідомими струмами (якщо вітка містить джерело струму, то струм цієї вітки відомий). Отже, система рівнянь за законами Кірхгофа повинна мати стільки рівнянь, скільки невідомих струмів (віток).

Розглянемо приклад складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для схеми (рис.1.6):

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 + j = 0 \\ I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = E_2 - E_1 - E_3 \\ -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot (R_3 + R_4) = E_3. \end{cases} \quad (1.17)$$

Порядок розрахунку струмів схеми за законами Кірхгофа.

1. Визначаємо кількість вузлів і віток у схемі, а отже кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа.

2. Довільно вибираємо напрямки струмів у вітках і напрямки обходу контурів.

3. Складаємо і вирішуємо систему відносно невідомих струмів.

1.6. Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму

На підставі закону збереження енергії: кількість тепла, що виділяється в опорах схеми, повинна дорівнювати енергії, яка постачається за той же самий час джерелами енергії, тобто потужність джерел енергії (напруги і струму) дорівнює потужності, що споживається опорами схеми:

$$\sum_{i=1}^k (\pm E_i \cdot I_i) + \sum_{i=1}^p J_i \cdot U_{ab} = \sum_{i=1}^l I_i^2 \cdot R_i, \quad (1.18)$$

де k – кількість ЕРС у схемі;

p – кількість джерел струму у схемі;

l – кількість опорів у схемі;

U_{ab} – напруга між умовною точкою a , куди втікає струм джерела струму J_i , та умовною точкою b , звідки струм цього джерела струму витікає.

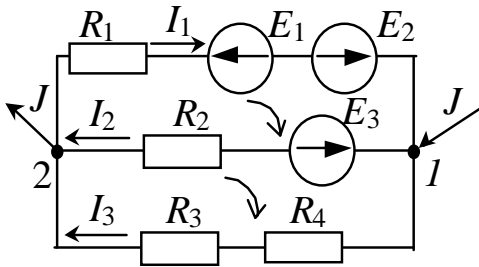


Рис.1.6

Правило складання балансу: якщо напрямок джерела ЕРС E_i і напрямок струму I_i , що протікає через нього, збігаються, то доданок $E_i \cdot I_i$ беремо зі знаком "+", навпаки - зі знаком "-".

Приклад складання балансу для схеми рис.1.6:

$$-E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_1 - E_3 \cdot I_2 + J \cdot U_{12} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot (R_3 + R_4). \quad (1.19)$$

1.7. Потенціальна діаграма

Потенціальна діаграма – це графік розподілу потенціалу вздовж замкнутого контуру або ділянки кола. По осі абсцис відкладають опори вздовж контуру, один за одним, починаючи від довільно обраної точки, потенціал якої приймають рівним нулю. По осі ординат відкладають потенціали точок контуру.

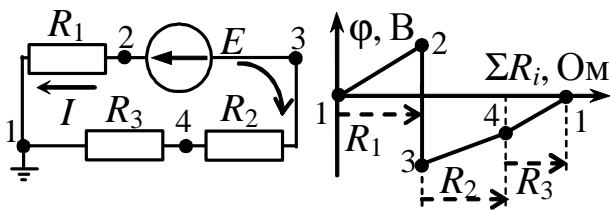


Рис.1.7

Приклад побудування діаграми

(рис.1.7):

$$I = E / (R_1 + R_2 + R_3); \quad \varphi_1 = 0;$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + I \cdot R_1;$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - E; \quad \varphi_4 = \varphi_3 + I \cdot R_2;$$

$$\varphi_1 = \varphi_4 + I \cdot R_3 = 0.$$

1.8. Метод контурних струмів

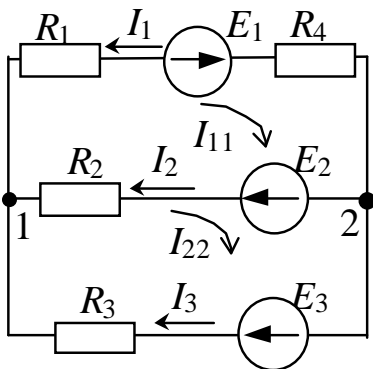


Рис.1.8

Метод застосовується для розрахунку кіл будь-якої складності й дозволяє зменшити кількість рівнянь, що треба було б скласти за законами Кірхгофа, а саме з m до $m-n+1$ де n – кількість вузлів, а m – кількість віток у схемі.

Відповідно до цього методу роблять припущення, що в кожному незалежному контурі тече свій контурний струм (незалежний контур – це контур, що містить хоча б одну вітку, яка не входить в інші

контури).

Кількість рівнянь, що треба скласти за методом, дорівнюється кількості незалежних контурів, або числу рівнянь за другим законом Кірхгофа. Струми віток визначають за допомогою контурних струмів.

Потрібно мати на увазі, що контурний струм – це зручне, але умовне розрахункове поняття, фізично існують лише струми віток.

Розглянемо схему рис.1.8, у якій довільно задамося напрямками струмів у вітках I_1, I_2, I_3 і напрямками контурних струмів I_{11}, I_{22} (за годинниковою стрілкою). Складаємо систему за другим законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_1 + I_{11} \cdot R_4 + I_{11} \cdot R_2 - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ I_{22} \cdot R_3 + I_{22} \cdot R_2 - I_{11} \cdot R_2 = E_3 - E_2, \end{cases} \quad \text{або} \quad (1.20)$$

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_4 + R_2) - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3) = E_3 - E_2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Позначимо:

$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2$ - власний опір першого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать контуру;

$R_{22} = R_2 + R_3$ - власний опір другого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать контуру;

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ - взаємний опір першого та другого контурів, дорівнює опору, що належить обом контурам, в даному випадку - зі знаком "-";

$E_{11} = E_1 + E_2$; $E_{22} = E_3 - E_2$ - власні ЕРС першого та другого контурів, які дорівнюють алгебраїчній сумі усіх ЕРС, які належать першому та другому контурам відповідно (знак "+" перед ЕРС E_i означає, що напрямок цієї ЕРС збігається з обраним напрямком відповідного контурного струму).

Примітка: при користуванні цим методом контурні струми зручно направляти однаково (наприклад, за годинниковою стрілкою); тоді опори з однаковими індексами (R_{11}, R_{22} та т. д.) - додатні, а з різними (R_{12}, R_{23} та т. д.) - від'ємні.

Відповідно до позначень система (1.21) набуває вигляду

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} - I_{22} \cdot R_{12} = E_{11} \\ -I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} = E_{22}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Після того, як з системи знаходять значення контурних струмів (в даному випадку - I_{11} і I_{22}), визначають значення струмів віток:

$$I_1 = -I_{11}; \quad I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_3 = I_{22}. \quad (1.23)$$

Якщо в колі є джерело струму, ввімкнене в деяку вітку, один з контурних

струмів стає відомим (дорівнює струму джерела струму з відповідним знаком), тоді кількість рівнянь скорочується на одиницю.

Якщо схема має три незалежних контурів, то система містить три рівняння:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22} \\ I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33}. \end{cases} \quad (1.24)$$

і загальне рішення системи має вигляд:

$$\begin{aligned} I_{11} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \\ I_{22} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{23}}{\Delta} \\ I_{33} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{33}}{\Delta}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$ - головний визначник системи (1.25);

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$ - алгебраїчне доповнення, що отримують з головного

визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і першого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+1}$;

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$ - алгебраїчне доповнення, що отримують з головного

визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і другого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+2}$ і т. ін.

1.9. Метод вузлових потенціалів

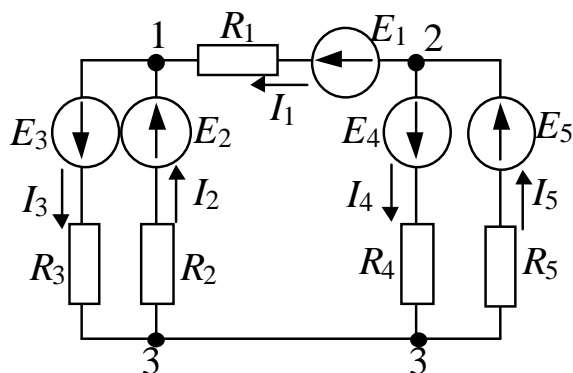


Рис.1.9

Це метод розрахунку електричних кіл, відповідно до якого за невідомі приймаються потенціали вузлів, після визначення яких можна знайти струм будь-якої вітки із законом Ома. Врахуємо, що завжди можна один з вузлів схеми «заземлити» (потенціал його прийняти рівним нулю), тому система рівнянь для визначення інших невідомих потенціалів вузлів повинна мати

$n-1$ рівнянь. У основі методу – закони Ома та перший закон Кірхгофа. Розглянемо схему рис.1.9, в якій «заземлюємо» вузол 3: $\varphi_3 = 0$.

За першим законом Кірхгофа для вузла 1 та за законом Ома для віток 1, 2, 3:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (1.26); \quad I_1 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_1) \cdot G_1 \quad (1.27)$$

$$I_2 = (-\varphi_1 + E_2) \cdot G_2 \quad (1.28); \quad I_3 = (\varphi_1 + E_3) \cdot G_3, \quad (1.29)$$

де $G_1 = \frac{1}{R_1}, G_2 = \frac{1}{R_2}, G_3 = \frac{1}{R_3}$ - провідності віток.

Підставимо (1.27), (1.28), (1.29) у (1.26). Отримуємо:

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_2 \cdot G_1 = E_2 \cdot G_2 + E_1 \cdot G_1 - E_3 \cdot G_3. \quad (1.30)$$

Якщо скористуватися аналогічними міркуваннями для вузла 2, то

$$-\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot (G_1 + G_3 + G_4) = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5. \quad (1.31)$$

Позначимо:

$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3$ - власна провідність вузла 1, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 1;

$G_{22} = G_1 + G_4 + G_5$ - власна провідність вузла 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 2;

$G_{12} = G_{21} = 1/R_1$ - взаємна провідність вузлів 1 і 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що напряму поєднують ці вузли.

$I_{11} = E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 - E_3 \cdot G_3$, $I_{22} = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5$; - вузлові струми відповідно першого та другого вузлів; добуток $E_i \cdot G_i$ беремо зі знаком "+", якщо ЕРС E_i спрямована до вузла, відносно якого визначається вузловий струм.

З урахуванням введених коефіцієнтів (1.30) і (1.31) набувають вигляду

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} = I_{11} \\ -\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} = I_{22} \end{cases}. \quad (1.32)$$

Після визначення із системи (1.32) потенціалів вузлів φ_1 та φ_2 знаходимо струми I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 за рівняннями (1.27)÷(1.29), а також за рівняннями (1.33)÷(1.34):

$$I_4 = (\varphi_2 + E_4) \cdot G_4, \quad (1.33)$$

$$I_5 = (-\varphi_2 + E_5) \cdot G_5. \quad (1.34)$$

Деякі особливості застосування методу.

Припустимо, що в схемі рис.1.9 у вітці, де тече струм I_5 немає опору R_5 , тоді $\varphi_2 = E_5$ і достатньо тільки одного рівняння з системи (1.32) – першого.

Коли у схемі два вузли - також потрібне лише одне рівняння для визначення потенціалу одного з вузлів. Так, для схеми рис.1.8, якщо $\varphi_2 = 0$, то

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) = -E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3. \quad (1.35)$$

Враховуючи, що $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1$, отримуємо вираз для напруги між вузлами 1 і 2:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}. \quad (1.36)$$

Останнє рівняння є основою *методу двох вузлів*, що застосовується для знаходження струмів у схемах, подібних розглянутій (після визначення напруги між двома вузлами струми віток визначають за законом Ома)

Порядок розрахунку за методом вузлових потенціалів

1. Довільно направляємо струми в вітках кола.
2. Складаємо систему рівнянь за методом, що містить $n-1$ рівнянь. Один з вузлів «заземлюємо»
3. Визначаємо власні і взаємні провідності вузлів та вузлові струми.
4. Вирішуємо систему (визначаємо потенціали вузлів кола).
5. За законом Ома визначаємо струми віток.

1.10. Заміна кількох паралельних віток, що містять ЕРС та опори, однією еквівалентною

Припустимо, що ділянки схем рис.1.10,а і рис.1.10,б еквівалентні щодо струму I і потенціалів вузлів a, b . Тоді рівняння для $G_{\text{екв}}$ і $E_{\text{екв}}$ (отримують за законами Кірхгофа для вузла a і за законом Ома для ділянок кола) мають вигляд:

$$E_{\text{екв}} = \frac{E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}; \quad (1.37)$$

$$G_{\text{екв}} = G_1 + G_2 + G_3. \quad (1.38)$$

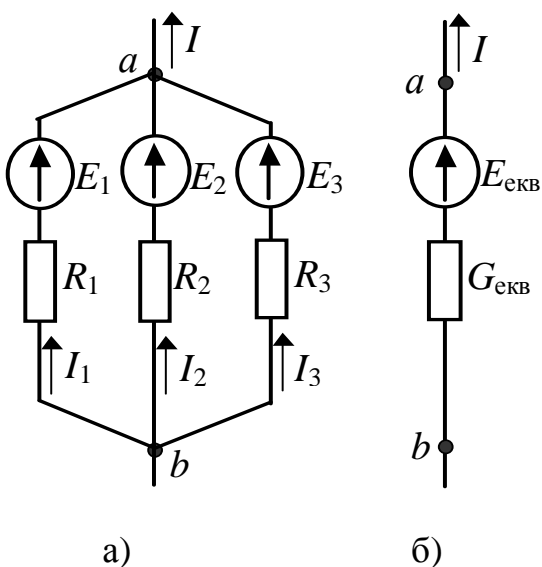


Рис.1.10

Якщо деяка ЕРС E_i спрямована у протилежну сторону, ніж $E_{\text{екв}}$, то у чисельнику правої частини рівняння (1.37) добуток $E_i \cdot G_i$ беремо зі знаком «-».

Примітка: якщо між вузлами a і b також ввімкнене джерело струму j , то у чисельник правої частини рівняння (1.37) додаємо «+ j » (якщо струм джерела струму j втікає в вузол a), або «- j » (якщо струм джерела струму j витікає з вузла a)

1.11. Основні властивості електричних кіл постійного струму

1.11.1. Поняття входних і взаємних провідностей

Вхідна провідність - відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС цієї ж вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nn}).

Взаємна провідність - відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС іншої вітки (вітка має номер m) за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nm}). Визначають входні та взаємні провідності розрахунковим і експериментальним шляхом. З поняттям вхідної провідності зв'язане поняття вхідного опору (відношення ЕРС однієї вітки до струму цієї ж вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках). Так вхідний опір вітки n :

$$R_{вхnn} = \frac{E_n}{I_n} = \frac{1}{G_{nn}}. \quad (1.39)$$

1.11.2. Принцип взаємності

Для будь-якого лінійного кола струм I_k в k -й вітці, який викликаний ЕРС E_m , що знаходиться в m -й вітці, $I_k = E_m \cdot G_{km}$, буде дорівнювати струму I_m в m -й вітці, що викликаний ЕРС E_k , яка знаходиться в k -й вітці за умови, що $E_k = E_m$ чисельно. Принцип доводиться з рівності $G_{mk} = G_{km}$ і $E_k = E_m$. Тобто : $I_m = E_k \cdot G_{mk}$, $I_k = E_m \cdot G_{km}$, а отже $I_k = I_m$.

1.11.3. Теорема компенсації

У будь-якому електричному колі без зміни струморозподілу в ньому опір

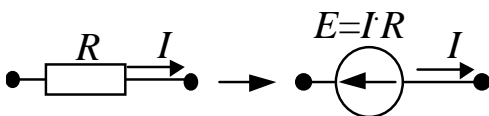


Рис.1.11

зі струмом, що протікає в ньому, може бути замінений на ЕРС, що дорівнює падінню напруги в опорі ($E = I \cdot R$) і спрямована назустріч струму в цьому опорі – див. рис.1.11.

1.11.4. Принцип накладання і метод накладання

Принцип накладання: струм у будь-якій вітці лінійного електричного кола буде дорівнювати алгебраїчній сумі струмів (так звані часткові струми), що викликані кожною з ЕРС окремо. Впливає принцип з лінійності рівнянь, що отримані на основі законів Кірхгофа для кіл з постійними параметрами.

Наприклад, для схеми рис.1.12 струм I_1 :

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' , \quad (1.40)$$

де I_1' - частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_1 ; I_1'' - частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_2 ; I_1''' - частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_3 (на кожному етапі інші ЕРС треба закорочувати).

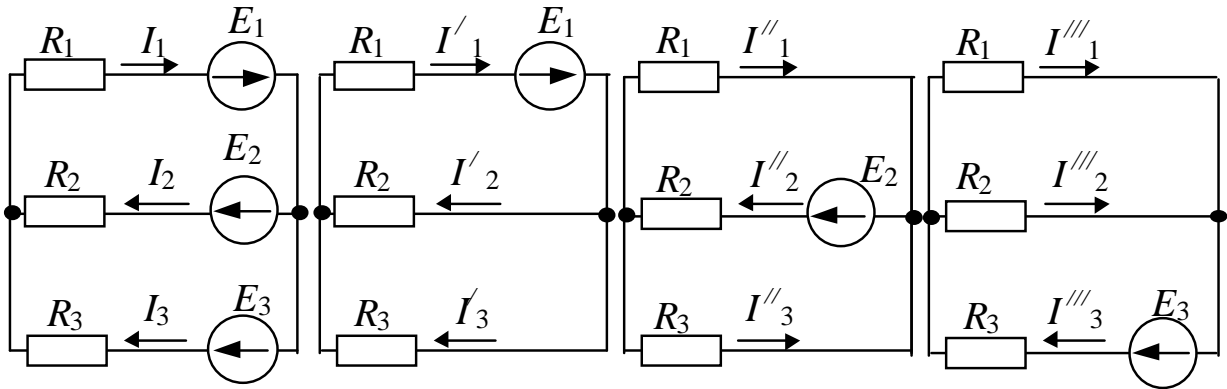


Рис.1.12

З принципу накладення випливає метод накладання.

Порядок розрахунку за методом накладання

1. Довільно направляємо струми у вітках.
2. Розраховуємо часткові струми від дії кожної ЕРС чи кожного джерела струму окремо. При цьому треба закорочувати інші джерела напруги та розми-кати джерела струму (враховуємо також, що не треба закорочувати внутрішній опір джерела напруги, якщо останній заданий).
3. Алгебраїчно підсумовуємо часткові струми, орієнтуючись при цьому на обрані напрямки струмів у вихідній схемі.

Примітка: частковими струмами не можна користуватися при розрахунку потужностей - $I_1^2 \cdot R_1 \neq I_1'^2 \cdot R_1 + I_1''^2 \cdot R_1 + I_1'''^2 \cdot R_1$.

1.11.5. Принцип лінійності

Якщо в лінійному колі змінюється ЕРС або опір в якій-небудь одній вітці, то дві будь-які величини (струми і напруги) двох будь-яких віток зв'язані один з одним лінійними залежностями виду: $y = a + b \cdot x$. Тобто, якщо у схемі рис.1.12 змінюється E_3 ($0 \leq E_3 \leq \infty$), то можна довести, що струми I_1 і I_2 зв'язані залежністю:

$$I_1 = a + b \cdot I_2 . \quad (1.41)$$

1.12. Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник

Зіркою опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому всі початки опорів, з'єднані в одну точку (рис.1.13,а), трикутником опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому початок одного опору з'єднується з кінцем іншого (рис.1.13,б).

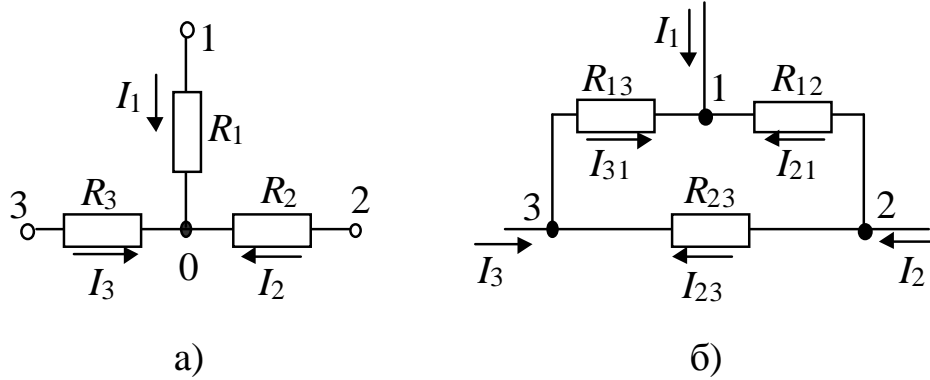


Рис.1.13

Схеми рис.1.13,а і рис.1.13,б еквівалентні у відношенні струмів I_1, I_2, I_3 та потенціалів вузлів 1, 2 і 3, якщо виконуються наступні співвідношення:

$$R_{12} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad (1.42)$$

$$R_{13} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}; \quad (1.43)$$

$$R_{23} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_2 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \quad (1.44)$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \quad (1.45) \quad R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \quad (1.46)$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.47)$$

Формули (1.42) ÷ (1.44) застосовують для переходу від зірки опорів до трикутника, а (1.45) ÷ (1.47) - для переходу від трикутника опорів до зірки опорів.

1.13. Двополюсник. Теорема про еквівалентний генератор.

Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці

У будь-якій електричній схемі завжди можна виділити яку-небудь вітку, а всю частину схеми, що залишилася, незалежно від її складності, умовно позначити прямокутником з двома вихідними затискачами (рис.1.14,а). По відношенню до виділеної вітки ця частина схеми, що залишилася, є *двополюсником*.

Таким чином, *двополюсник* - це узагальнена назва схеми, що двома своїми вихідними затискачами приєднується до виділеної вітки. Двополюсники бувають активними (якщо мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії) та пасивними (якщо не мають у своєму складі джерел енергії).

Теорема про *еквівалентний генератор*: будь-який активний двополюсник по відношенню до виділеної вітки можна замінити еквівалентним джерелом напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі холостої ходи, а внутрішній опір - вхідному опору двополюсника.

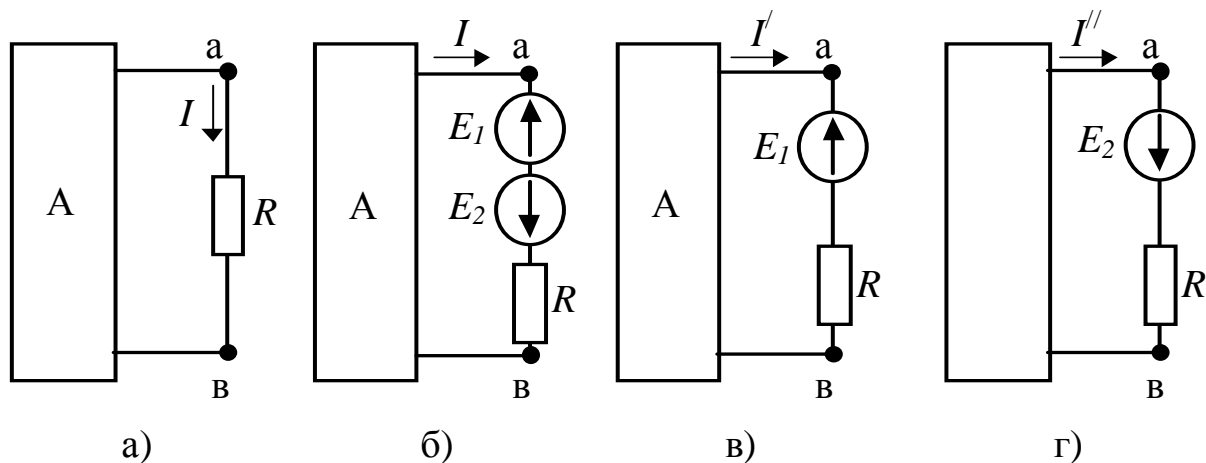


Рис.1.14

Доведення: У вітку "ав" ввімкнемо дві рівні, але протилежно спрямовані ЕРС E_1 та E_2 (рис.1.14,б). Відповідно до принципу накладання:

$$I = I' + I'', \quad (1.48)$$

де I' - частковий струм вітки з опором R , що викликаний ЕРС E_1 і всіма джерелами ЕРС та джерелами струму активного двополюсника;

I'' - частковий струм, що викликаний тільки джерелом ЕРС E_2 ($E_2=E_1$).

За законом Ома:

$$I' = \frac{U_{ab} - E_1}{R}. \quad (1.49)$$

Виберемо E_1 таким чином, щоб $I' = 0$, тобто - це режим холостої ходи (ві-

тка "ав" - розімкнута), тоді - $E_1 = E_2 = U_{ав} = U_{авхх}$, а $I = I'' = \frac{E_2}{R + R_{\text{вх}}}$, або

$$I = \frac{U_{авхх}}{R + R_{\text{вх}}}, \quad (1.50)$$

де $U_{авхх}$ - напруга холостого ходу на розімкнутих затискачах "ав";

$R_{\text{вх}}$ - вхідний опір двополюсника відносно вхідних затискачів;

R - опір вітки "ав".

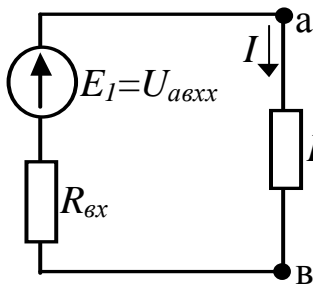


Рис.1.15

Сукупність ЕРС $E_2 = U_{авхх}$ і внутрішнього опору $R_{\text{вх}}$ можна розглядати як еквівалентний генератор з ЕРС, що дорівнює $U_{авхх}$, і внутрішнім опором, що дорівнює $R_{\text{вх}}$. Формула (1.50) відповідає схемі рис.1.15. Теорема доведена.

Використовують теорему для розрахунку струму в одній вітці електричного кола, цей метод розрахунку за розглянутою теоремою має назви:

- еквівалентного генератора;
- активного двополюсника;
- холостого ходу та короткого замикання.

Порядок розрахунку за методом:

1. "Виривають" опір у тій вітці, де треба визначити струм.
2. Визначають $R_{\text{вх}}$, при цьому закорочують усі ЕРС (якщо у джерела напруги заданий внутрішній опір, то його не закорочують), і розривають всі джерела струму.

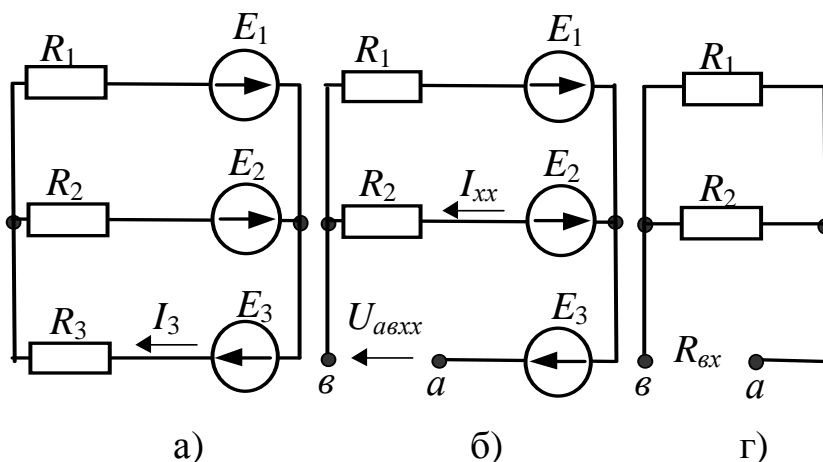


Рис.1.16

3. Визначають напругу холостого ходу на розімкнутих затискачах $U_{хх}$.

4. За формулою (1.50) визначають струм.

Приклад розрахунку для схеми (рис.1.16,а) за методом наведений нижче:

$$I_3 = \frac{U_{авхх}}{R_3 + R_{\text{вх}}};$$

$$U_{aexx} = E_2 + I_{xx} \cdot R_{ex} + E_3;$$

$$I_{xx} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} - \text{рис.1.16,б};$$

$$R_{ex} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} - \text{рис.1.16,г}.$$

1.14. Передача енергії від активного двополюсника до навантаження

Нехай навантаження R_H підімкнуте до активного двополюсника (рис.1.14,а), $R_H = R$, $I_H = I$; $R_{ex} = \text{const}$, а $0 \leq R_H \leq \infty$.

Знайдемо, при якому співвідношенні опорів R_{ex} та R_H буде передаватися максимальна потужність від активного двополюсника навантаженню:

$$P_H = I_H^2 \cdot R_H, \quad (1.51)$$

$$I_H = \frac{U_{aexx}}{R_H + R_{ex}}. \quad (1.52)$$

Отже:

$$P_H = \frac{U_{aexx}^2}{(R_H + R_{ex})^2} \cdot R_H. \quad (1.53)$$

Для знаходження максимуму функції $P_H = f(R_H)$ треба взяти похідну виразу (1.53) й дорівняти її до нуля:

$$\frac{dP_H}{dR_H} = \frac{U_{aexx}^2 \cdot ((R_H + R_{ex})^2 - 2 \cdot (R_H + R_{ex}) \cdot R_H)}{(R_H + R_{ex})^4} = 0. \quad (1.54)$$

Звідки

$$(R_H + R_{ex})^2 - 2 \cdot (R_H + R_{ex}) \cdot R_H = 0; \quad (1.55)$$

$$R_{ex}^2 - R_H^2 = 0; \quad \text{або} \quad R_{ex} = R_H. \quad (1.56)$$

Оскільки друга похідна $\frac{d^2 P_H}{dR_H^2} < 0$, то умова $R_{ex} = R_H$ відповідає саме максимуму функції $P_H = f(R_H)$.

Підставимо (1.56) в (1.53) і отримаємо максимальну потужність, яка може виділитися в навантаженні:

$$P_{H \max} = \frac{U^2}{4 \cdot R_H}. \quad (1.57)$$

Коефіцієнт корисної дії (К.К.Д., η) при $R_{ex} = R_H$:

$$\eta = \frac{P_H}{P_{\text{полн}}} = \frac{\frac{U^2}{4 R_H} \cdot R_H}{(R_H + R_{ex})^2 \cdot U \cdot I} = \frac{U^2}{4 R_H} \cdot R_H \cdot (R_H + R_{ex})}{(R_H + R_{ex})^2 \cdot U^2} = \frac{R_H}{(R_H + R_{ex})}, \quad (1.58)$$

де $P_{\text{полн}} = U \cdot I = \frac{U^2}{(R_H + R_{ex})}$ - повна потужність, що виробляється еквівалентним генератором.

Таким чином, $\eta = 0,5$ якщо $R_{ex} = R_H$. При $R_H > R_{ex}$ - $\eta > 0,5$.

Висновок: якщо потужність P_H значна, то працювати з таким низьким К.К.Д. ($\eta = 0,5$) неприпустимо. Але якщо P_H мала (наприклад потужність різних датчиків пристроїв автоматики), то такий низький К.К.Д. вважають задовільним, оскільки при цьому віддається максимально можлива активна потужність навантаженню.

Узгодження навантаження – вибір величини навантаження R_H рівним R_{ex} активного двополюсника.

1.15. Передача енергії по лініям передачі

Спрощена схема передачі електричної енергії зображена на рис.1.17

На схемі позначено:

U_1 – напруга генератора на початку лінії;

U_2 - напруга на навантаженні (кінець лінії);

R_H - навантаження наприкінці лінії;

R_0 - опір проводів.

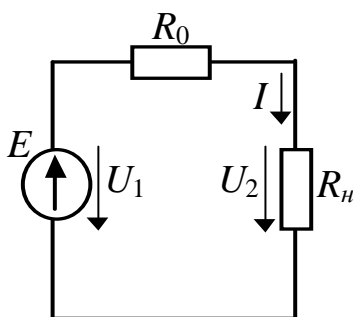


Рис.1.17

У реальних лініях передач $\eta = 0,94 \div 0,97$, тому U_2 усього на кілька процентів відрізняється від U_1 .

Побудуємо криві (рис.1.18), які повністю характеризують режим роботи лінії, при $U_1 = \text{const}$:

1. $P_1 = U_1 \cdot I$ - потужність генератора;

2. $U_2 = U_1 - I \cdot R_0$ - напруга на навантаженні;

3. $P_2 = P_1 - I^2 \cdot R_0 = U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0 = I \cdot (U_1 - I \cdot R_0)$

- потужність в навантаженні;

$$4. \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0}{U_1 \cdot I} = 1 - \frac{I \cdot R_0}{U_1} = \frac{I^2 \cdot R_H}{(R_0 + R_H) \cdot I^2} = \frac{R_H}{R_0 + R_H} - \text{К.К.Д.}$$

При $P_2 = const$ з підвищенням U_2 можна зменшити значення струму I і тому втрати у проводах P_{np} знижуються, що дозволяє зменшити переріз проводів:

$$P_{np} = R_0 \cdot I^2 = \rho \cdot \frac{l_{np}}{S_{np}} \cdot \left(\frac{P_2}{U_2} \right)^2, \quad (1.59)$$

де l_{np}, S_{np} - довжина та перетин проводів.

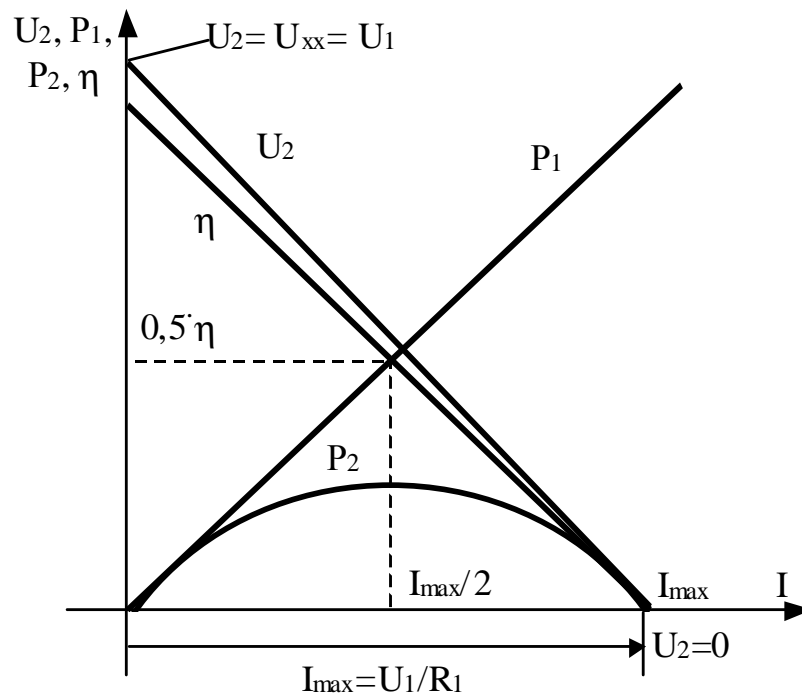


Рис.1.18

Розділ 2. СИНУСОЇДНИЙ СТРУМ

2.1. Основні величини, що характеризують синусоїдний струм

Струм, що змінюється за законом синуса, називається *синусоїдним* (рис.2.1). Миттєве значення такого струму:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right), \quad (2.1)$$

де I_m – амплітудне, тобто максимальне значення струму, А;

φ – початкова фаза, визначає величину зсуву синусоїди відносно нуля (якщо $\varphi > 0$ синусоїда зсунута вліво, а якщо $\varphi < 0$ синусоїда зсунута вправо), градуси;

T – період, тобто час, за який відбувається одне повне коливання, с;

f – частота коливань, тобто кількість коливань в секунду, $1/\text{с} = \text{Гц}$;

ω – кутова частота, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, рад/с;

$(\omega \cdot t + \varphi)$ – фаза, аргумент синуса, характеризує стан коливання.

Якщо у синусоїдних величин однієї частоти однакові початкові фази, то говорять, що такі синусоїдні величини співпадають за фазою; якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm \pi$, то говорять, що ці функції знаходяться у протифазі, якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm \pi/2$, то говорять, що ці функції знаходяться у квадратурі.

Синусоїдні струми відносно низьких частот отримують за допомогою синхронних генераторів, а синусоїдні струми високої частоти (більш десятків кілогерц) – за допомогою напівпровідникових генераторів.

На рис.2.1 показана крива миттєвого значення струму (так звана хвильова діаграма), коли $\varphi > 0$.

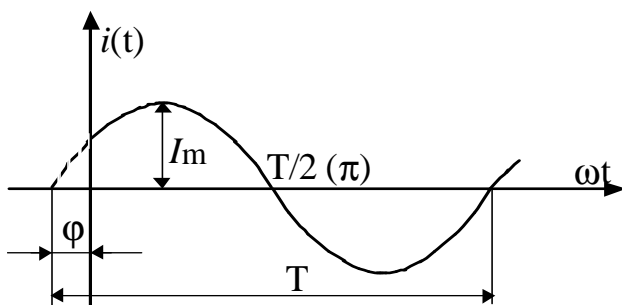


Рис.2.1

Синусоїдна величина характеризується значеннями:

- миттєвим,
- амплітудним,
- середнім
- діючим.

Середнє значення синусоїдної величини – це її середнє значення за половину періоду:

$$I_{cp} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m, \quad I_{cp} \approx 0,638 \cdot I_m. \quad (2.2)$$

Діюче значення синусоїдного струму чисельно дорівнює значенню постійного струму, який за час, що дорівнює періоду T , викликає виділення такої кількості тепла в провіднику з опором R , що і синусоїдний струм за той же час T . Діючий струм називають ще *ефективним* або *середньоквадратичним*.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot \sin \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (2.3)$$

Коефіцієнти, що характеризують синусоїдну функцію:

- коефіцієнт амплітуди $k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}$;
- коефіцієнт форми $k_f = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2/\pi \cdot I_m} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$.

2.2. Синусоїдний струм активного опору

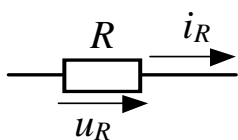


Рис.2.2

Взагалі активний опір на змінному струмі R_{\sim} є більшим, ніж активний опір на постійному струмі R_{-} , внаслідок явищ концентрації струму в поверхневих шарах провідника (поверхневий ефект) і ефекту близькості. Але будемо вважати, що $R_{\sim} = R_{-}$.

Нехай по активному опору тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

За законом Ома:

$$u_R = i \cdot R = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t = U_m \cdot \sin \omega t, \quad (2.4)$$

де $U_m = I_m \cdot R$ - амплітудне значення напруги на активному опорі. (2.5)

З (2.5) бачимо, що струм і напруга на активному опорі співпадають за фазою (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює нулю: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$) - рис.2.3.

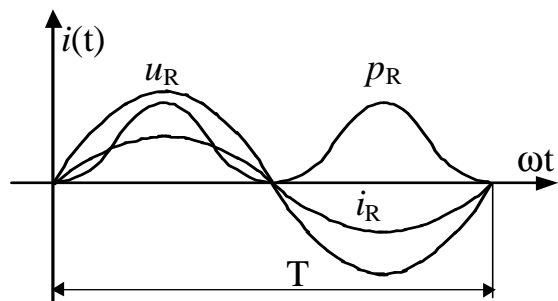


Рис.2.3

Миттєва, активна потужність активного опору:

1) Швидкість надходження енергії від джерел характеризується потужністю. *Миттєва потужність* - добуток миттєвої напруги на ділянці кола на миттєвий струм. Для активного опору:

$$p_R = u_R \cdot i_R = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega t)). \quad (2.6)$$

Таким чином бачимо, що миттєва потужність має постійну складову - $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$, та змінну складову - $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t)$. Миттєва потужність в активному опорі має тільки позитивне значення і частоту в 2 рази більшу, ніж частота синусоїдного струму.

Активна потужність - це середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_R = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_R dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \cdot I = I^2 \cdot R. \quad (2.7)$$

2.3. Синусоїдний струм індуктивності

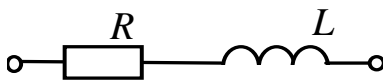


Рис.2.4

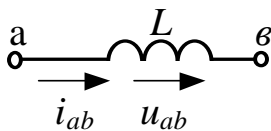


Рис.2.5

Будь-яка обмотка (катушка) має індуктивність і активний опір. На схемі катушку позначають так, як показано на рис.2.4. Як відомо, *індуктивність* – це елемент схеми заміщення, який дозволяє врахувати при розрахунках явища самоіндукції і накопичування енергії магнітного поля. Виділимо з схеми рис.2.2 тільки одну індуктивність - рис.2.5. Нехай по активному опорі тече синусоїдний струм: $i = I_m \cdot \sin \omega t$. У катушці наводиться ЕРС:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cos(\omega t) = -\omega \cdot L \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (2.8)$$

Позитивний напрямок ЕРС співпадає зі струмом, а напруга на індуктивності: $u_L = \varphi_a - \varphi_b = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{mL} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (2.9)$

де $U_{mL} = I_m \cdot \omega \cdot L = I_m \cdot X_L$ - амплітудне значення напруги на індуктивному опорі; (2.10)

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L - \text{індуктивний опір, Ом.} \quad (2.11)$$

З (2.9) бачимо, що напруга в індуктивності випереджає струм на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$). Тобто якщо $u_L = 0$, то $i_L = \max$ - див рис.2.6.

Миттєва потужність індуктивності:

$$p_L = u_L \cdot i_L = U_{mL} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t). \quad (2.12)$$

Миттєва потужність індуктивності може мати позитивний знак - тоді індуктивність накопичує енергію, що береться з джерела, і від'ємний знак - тоді ін-

дуктивність віддає енергію в джерело.

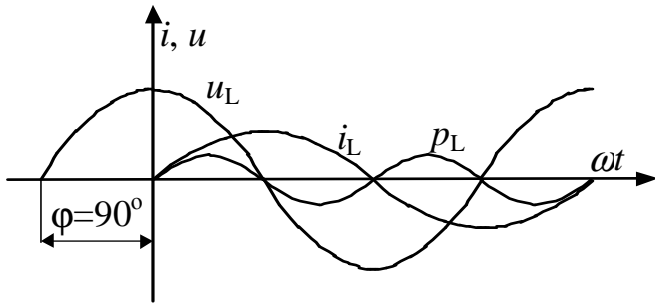


Рис.2.6

2) Активна потужність індуктивності – середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_L = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_L dt = 0. \quad (2.13)$$

2.4. Синусоїдний струм ємності

Ємність (рис.2.7) як елемент схеми заміщення дозволяє врахувати явища зарядки конденсатора і накопичування енергії електричного поля. Якщо

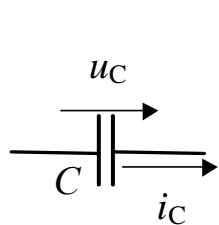


Рис.2.7

$$u_C = \text{const}, \text{ то } i_C = \frac{dq}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

Якщо $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t)$, то

$$q = C \cdot u_C = C \cdot U_m \cdot \sin(\omega t) \quad (2.15)$$

і конденсатор періодично перезаряджається, що супроводжується протіканням через нього зарядного струму:

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = \frac{d(C \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t))}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_{mC} \cdot \cos(\omega t) = \\ &= \frac{1}{X_C} \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\text{де } U_{mC} = I_m \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = I_m \cdot X_C - \text{амплітудне значення напруги на ємності}, \quad (2.17)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} - \text{ємнісний опір, Ом}. \quad (2.18)$$

З (2.14) і (2.16) ми бачимо, що струм ємності випереджає напругу на ній на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$) - рис.2.8. Тобто, якщо $u_C = 0$, то $i_C = \text{max}$ - див рис.2.8.

Миттєва потужність ємності (може мати позитивний і від'ємний знаки):

$$p_C = u_C \cdot i_C = U_{mC} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t). \quad (2.19)$$

Активна потужність ємності:

$$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_C dt = 0. \quad (2.20)$$

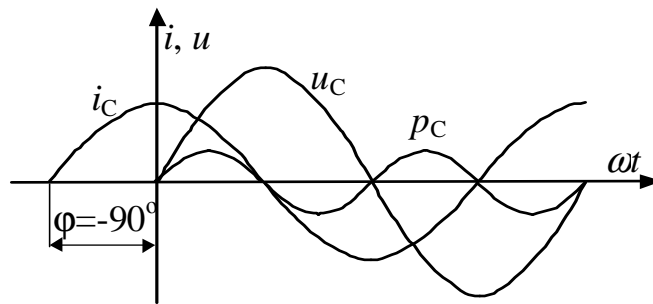


Рис.2.8

2.5. Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

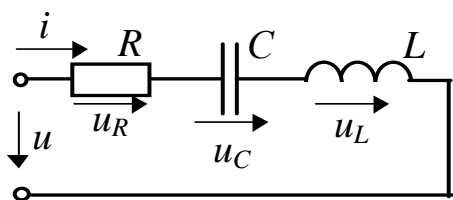


Рис.2.9

Розглянемо послідовне з'єднання активного опору, ємності, індуктивності (рис.2.9). Нехай до кола прикладена синусоїдна напруга $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. У колі протікає синусоїдний струм - $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

За другим законом Кірхгофа для миттєвих

значень $u = u_R + u_C + u_L$.

(2.21)

З урахуванням раніш розглянутого

$$u = I_m R \sin(\omega t) - I_m X_C \cos(\omega t) + I_m X_L \cos(\omega t), \quad (2.22)$$

$$\text{або } U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot (R \cdot \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \cdot (X_L - X_C)). \quad (2.23)$$

Позначимо $X = X_L - X_C$ - реактивний опір кола

(2.24)

$$\text{Тоді } R \cdot \sin(\omega t) + X \cdot \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.25)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{X}{R} - \text{кут зсуву фаз між напругою } u \text{ і струмом } i; \quad (2.26)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} - \text{модуль повного опора кола.} \quad (2.27)$$

Отже вираз (2.23) можна записати:

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.28)$$

$$\text{або } U_m = I_m \cdot Z. \quad (2.29)$$

Розглянемо схему рис.2.10 – паралельне з'єднання трьох елементів – активного опора, ємності й індуктивності.

$$u_C = U_m \cdot \sin(\omega t), \quad i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) - \text{напруга та струм на вході кола.}$$

$$\text{Перший закон Кірхгофа: } i = i_R + i_C + i_L. \quad (2.30)$$

З урахуванням раніш розглянутого струми віток:

$$i_R = U_m \cdot G \cdot \sin(\omega t), \quad (2.31)$$

де $G = \frac{1}{R}$ – активна провідність. (2.32)

$$i_C = U_m \cdot B_C \cdot \cos(\omega t) = U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t), \quad (2.33)$$

де $B_C = \omega \cdot C$ – реактивна ємнісна провідність. (2.34)

$$i_L = -U_m \cdot B_L \cdot \cos(\omega t), \quad (2.35)$$

де $B_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$ – реактивна індуктивна провідність. (2.36)

Тоді вираз (2.30) набуває вигляду

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot [G \cdot \sin(\omega t) - (B_L - B_C) \cdot \cos(\omega t)], \text{ або} \quad (2.37)$$

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot \sqrt{G^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi), \quad (2.38)$$

де φ - кут зсуву фаз між напругою u і струмом i ,

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{B}{G}, \quad (2.39)$$

$B = B_L - B_C$ – реактивна провідність. (2.40)

Застосуємо позначення:

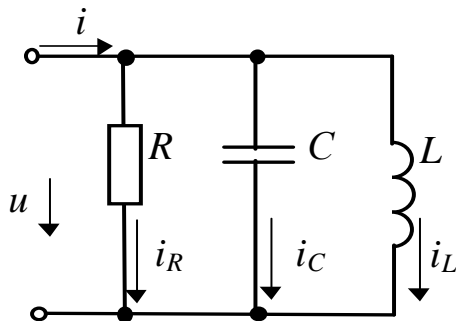


Рис.2.10

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} - \quad (2.41)$$

повна провідність кола.

Остаточно маємо:

$$I_m = U_m \cdot Y \quad (2.42)$$

Формули (2.24), (2.26), (2.27), (2.29), (2.32), (2.36), (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) - основа для розрахунку найпростіших кіл синусоїдного струму тригонометричним методом.

2.6. Потужність в колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна)

Розрізняють повну, активну, реактивну потужності.

Припустимо, до якоїсь складного кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, на вході кола тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

Миттєва потужність:

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U \cdot I \cdot (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)). \quad (2.43)$$

Активна потужність – середнє значення p за період, тобто енергія, що виділяється в одиницю часу у вигляді теплоти на ділянці кола, що містить опір R :

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cdot \pi = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad (2.44)$$

де $\cos \varphi$ - коефіцієнт потужності.

При розрахунках синусоїдних кіл застосовують поняття *реактивної* потужності: $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$. (2.45)

Реактивна потужність додатна при відстаючому струмі (R - L навантаження, $\varphi > 0$) і від'ємна при випереджаючому струмі (R - C навантаження, $\varphi < 0$). Тобто індуктивність можна розглядати як споживач реактивної енергії, а ємність – як її генератор.

Оскільки електричні машини й апарати конструюють для роботи на певні значення струмів і напруг, то їх характеризують не активною, що залежить від $\cos \varphi$, а *повною* потужністю:

$$S = U \cdot I. \quad (2.46)$$

Повна потужність показує ту активну потужність, яку джерело енергії може віддати споживачу, якщо останній працює при $\cos \varphi = 1$.

Трикутники опорів, провідностей і потужностей представлені на рис.2.11.

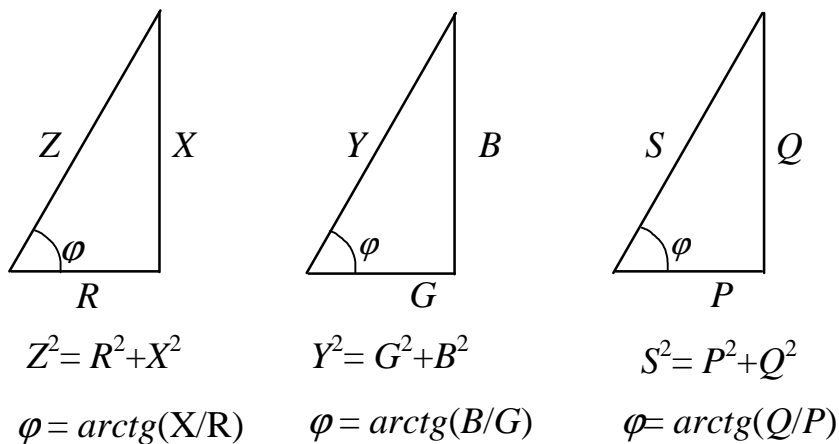


Рис.2.11

2.7. Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл

Розрахунок електричних кіл суттєво полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами, або комплексними числами.

Відповідно до формули Ейлера комплексне число $e^{j \cdot \alpha}$ дорівнює: $e^{j \cdot \alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ (2.47), і на комплексній площині зображується вектором, що має одиничну довжину та складає з віссю дійсних чисел кут α (рис. 2.12). Проекція $e^{j \cdot \alpha}$ на вісь дійсних чисел - $\cos \alpha$, а на вісь уявних чисел - $\sin \alpha$; $j = \sqrt{-1}$ -

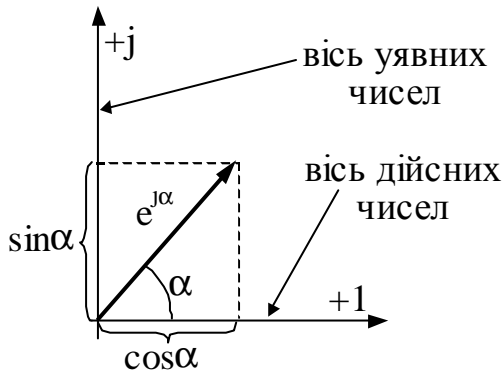


Рис.2.12

уявна одиниця.

Якщо замість числа $e^{j\cdot\alpha}$ розглянути число $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha}$, то відповідно до формули Ейлера $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha} = I_m \cdot \cos \alpha + jI_m \cdot \sin \alpha$, і на комплексній площині воно зображується вектором, що має довжину I_m і також складає з віссю дійсних чисел кут α . Кут α може бути будь-яким. Припустимо, що $\alpha = \omega \cdot t + \varphi$, тоді

$$I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + jI_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (2.48)$$

де $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – дійсна частина,

$I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ – коефіцієнт при уявній одиниці j .

Таким чином, синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ можна уявити як проєкцію вектора $I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$, що обертається з кутовою швидкістю ω , на вісь уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення вектора $I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t)}$ повністю визначає синусоїдну функцію $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, а комплексне число $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j \cdot \varphi}$ зветься комплексною амплітудою струму ($e^{j \cdot \omega \cdot t}$ – оператор обертання). Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити простіші операції.

Примітка: на комплексній площині від'ємні кути відкладаються проти годинникової стрілки від осі дійсних чисел, негативні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Розглянемо приклад розв'язання задачі за допомогою комплексної площини.

Дано: схема рис.2.13, $i_1 = 10 \cdot \sin(\omega t - 60)$, $i_2 = 5 \cdot \sin(\omega t + 30)$.

Знайти: струм i .

За першим законом Кірхгофа для миттєвих значень струму $i = i_1 + i_2$.

Будуємо на комплексній площині вектори, що зображують струми i_1 , i_2 , та складаємо їх для отримання загального струму i .

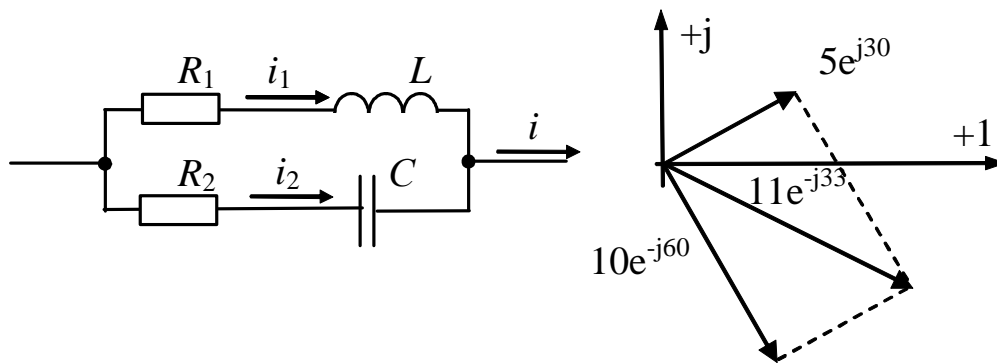


Рис.2.13

2.8. Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами

Існують чотири *форми* запису комплексних чисел:

- показова - $\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$;
- полярна - $\underline{I}_m = 5 \cdot \angle 30^\circ$;
- алгебраїчна - $\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$, де 4,33 - дійсна частина, $j2,5$ - уявна частина;
- тригонометрична - $\underline{I}_m = 5 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$, як перехід від полярної форми ($\underline{I}_m = 5 \cdot \angle 30^\circ$) до алгебраїчної ($\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$).

Дії над комплексними числами:

- множення роблять у полярній або показовій формі, наприклад:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 5 \cdot \angle 30^\circ \cdot 15 \cdot \angle -40^\circ = 75 \cdot \angle -10^\circ, \text{ В.}$$

- ділення роблять також у полярній або показовій формі, наприклад:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{75 \cdot \angle -10^\circ}{15 \cdot \angle -40^\circ} = 5 \angle 30^\circ, \text{ А}$$

- складання або вирахування роблять в алгебраїчній формі, наприклад:

$$\underline{I}_{m1} = 10 \angle (-60^\circ) = 10 \cdot \cos(-60^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(-60^\circ) = 5 - j \cdot 8,66,$$

$$\underline{I}_{m2} = 5 \angle 30^\circ = 10 \cdot \cos 30^\circ + j 10 \cdot \sin 30^\circ = 4,33 + j \cdot 2,5,$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 5 - j \cdot 8,66 + 4,33 + j \cdot 2,5 = 9,33 - j \cdot 6,16.$$

Перехід від алгебраїчної до полярної форми має деякі особливості.

Так, якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в першій або четвертій чвертях комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle 30^\circ,$$

$$\underline{I}_m = 4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(-\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle (-30^\circ).$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у другій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle 150^\circ.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число знаходиться в третій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(- \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right) \right)^\circ = 5 \angle (-150)^\circ.$$

Примітка: $\frac{1}{j} = -j$; множення вектора на уявне число j означає його поворот на 90° проти годинникової стрілки.

2.9. Символічний (комплексний) метод розрахунку кін синусоїдного струму

Суть методу полягає в тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені відносно комплексних струмів, ЕРС і напруг. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщає її, диференціювання заміняється множенням на $j\omega$, а інтегрування - діленням на $j\omega$

2.10. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Розглянемо просте електричне коло (рис.2.9), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, і в якому тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \phi)$. Інтегрально-диференціальне рівняння, що характеризує стан кола (другий закон Кірхгофа) - $u = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int u_C dt$. (2.49)

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг має вигляд

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_m - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} - \text{другий за-} \quad (2.50)$$

кон Кірхгофа в комплексній формі.

Застосуємо позначення:

$$X_L = \omega \cdot L, \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} - \quad (2.51)$$

відповідно індуктивний, ємнісний, реактивний опори, модуль повного опора.

Тоді рівняння (2.50) набуває вигляду:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \left(R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right) = \underline{I}_m \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I}_m \cdot Z \cdot \angle \varphi, \quad (2.52)$$

$$\text{де } \underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = Z \angle \varphi - \text{комплекс повного опора кола}, \quad (2.53)$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} - \text{кут зсуву фаз між струмом і напругою}. \quad (2.54)$$

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} - \text{закон Ома в комплексній формі}. \quad (2.55)$$

Розглянемо коло (рис.2.10), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, і на вході якого тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів в інтегрально-диференціальній формі:

$$i = i_R + i_L + i_C = u \cdot G + \frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt + C \frac{du}{dt}, \quad (2.56)$$

$$\text{де } i_L = \frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt, \quad i_C = C \frac{du}{dt}.$$

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг має вигляд:

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m \cdot G + \frac{\underline{U}_m}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{\underline{U}_m}{-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC} - \text{перший закон Кі-} \quad (2.57)$$

рхгофа в комплексній формі.

Висновки:

- алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю $\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$;
- алгебраїчна сума комплексних напруг уздовж замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС: $\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \sum_{k=1}^m \underline{E}_k$;
- оскільки в основі усіх розглянутих методів розрахунку кіл постійного струму лежать закони Кірхгофа, то всі вони можуть бути використані для розрахунку кіл синусоїдного струму в комплексній формі.

2.11. Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола

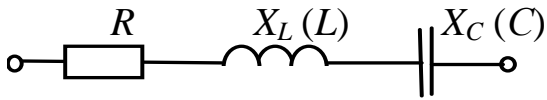


Рис.2.14

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на цій ділянці кола:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j\varphi}} = Y \cdot e^{-j\varphi} = G - j \cdot B, \quad (2.58)$$

де G - активна провідність;

$B = B_L - B_C$ - реактивна провідність.

Знайдемо G і B , якщо відомі R , $X = X_L - X_C$:

$$\underline{Y} = G - j \cdot B = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{(R - j \cdot X)}{(R + j \cdot X) \cdot (R - j \cdot X)} = \frac{(R - j \cdot X)}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (2.59)$$

$$\text{Тобто } G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad (2.60)$$

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}. \quad (2.61)$$

Знайдемо R і X , якщо відомі G і B :

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{(G + j \cdot B)}{(G - j \cdot B) \cdot (G + j \cdot B)} = \frac{(G + j \cdot B)}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \cdot \frac{B}{G^2 + B^2}. \quad (2.62)$$

$$\text{Тобто } R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad (2.63)$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}. \quad (2.64)$$

2.12. Комплексна форма запису потужності.

Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму

Припустимо, напруга на ділянці кола - $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$, а струм - $\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$.

Кут зсуву фаз між напругою і струмом $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Тоді комплексом повної потужності визначається:

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = P + j \cdot Q = U \cdot I \cdot \cos \varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi, \quad (2.65)$$

де $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j\varphi_i}$ - спряжене комплексне значення струму \underline{I} .

Вимір потужності робиться ватметром, наприклад, електродинамічної сис-

теми. Ватметр має дві котушки: одна – нерухома, підключена послідовно в ділянці кола, де роблять вимір потужності, виконана товстим проводом і має малий опір; друга – рухома, підключена паралельно ділянці кола, де роблять вимір потужності, виконана тонким проводом і має великий опір.

Знак «*» ставлять на кінцях однойменних затискачів. Ватметр, показаний на рис.2.15, вимірює:

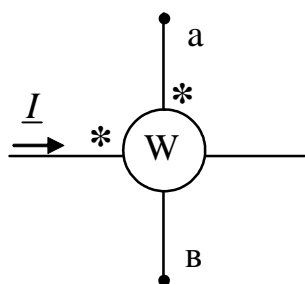


Рис.2.15

$$\operatorname{Re}[\tilde{S}] = \operatorname{Re}[\underline{U}_{av} \cdot \underline{I}^*] = U_{av} \cdot I \cdot \cos\left(\angle \underline{U}_{av} \cdot \underline{I}\right).$$

У будь-якому колі повинен виконуватися баланс як активних, так і пасивних потужностей, тобто сума всіх потужностей, що віддаються джерелом повинна дорівнюватися сумі всіх потужностей, що приймаються споживачами:

$$\sum_{k=1}^n P_{kdджер} = \sum_{k=1}^m P_{kсп} ; \quad \sum_{k=1}^n Q_{kdджер} = \sum_{k=1}^m Q_{kсп}.$$

2.13. Векторні й топографічні діаграми

Векторні діаграми - діаграми, що зображують сукупність векторів синусоїдних величин, що розглядаються, на комплексній площині з дотриманням їх взаємної орієнтації.

Топографічна діаграма - сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі. Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то отримуємо *векторно-топографічну* діаграму.

Хвильова (часова) діаграма – крива миттєвих значень струмів, напруг тощо.

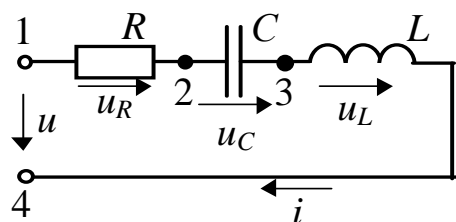


Рис.2.16

Розглянемо побудову векторно-топографічної діаграми на прикладі схеми рис.2.16:

Порядок побудови векторно-топографічної діаграми:

- розраховуємо комплекс струму \underline{I}_m ;
- визначаємо $U_{mR} = I_m \cdot R$, $U_{mL} = I_m \cdot X_L$,

$$U_{mC} = I_m \cdot X_C ;$$

- вибираємо масштаби за струмом і за напругою – m_I , m_U ;
- позначаємо точки на схемі (1-4);

- останню точку (4 в нашому випадку) розташовуємо на початку координат, обхід робимо назустріч струму послідовно від останньої точки до першої; при

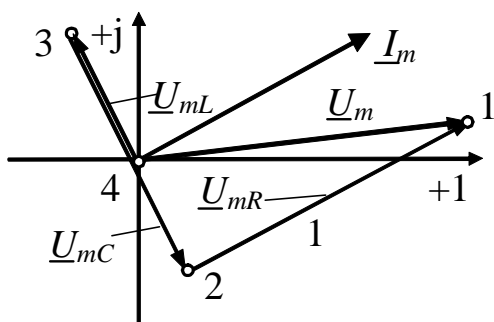


Рис.2.17

цьому пам'ятаємо, що напруга на активному опорі співпадає зі струмом за фазою, напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90° , напруга на ємності відстає від струму за фазою на 90° .

На рис.2.17 наведено приклад побудови діаграми у випадку активно-ємнісного характеру кола (струм \underline{I}_m випереджає напругу $\underline{U}_m = \underline{U}_{m14}$ на вході кола).

2.14. Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження

При передачі сигналів, особливо слабких, від джерела до навантаження часто потрібно забезпечити максимальну потужність цього сигналу в навантаженні методом підбору параметрів навантаження.

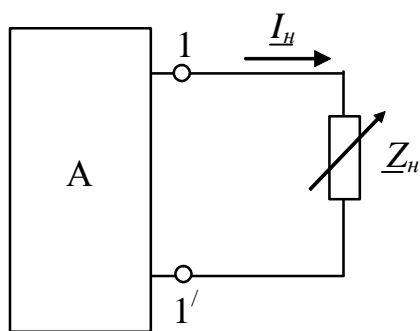


Рис.2.18

До затискачів $11'$ активного двополюсника підключене навантаження - рис.2.18. Нехай $\underline{Z}_o = R_o + j \cdot X_o$ є вхідний опір активного двополюсника з боку затискачів $11'$, а $\underline{Z}_n = R_n + j \cdot X_n$ - опір навантаження.

За теоремою про активний двополюсник струм навантаження:

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{U}_{11'}}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_o} = \frac{\underline{U}_{11'}}{(R_n + R_o) + j \cdot (X_n + X_o)}. \quad (2.66)$$

$$P_n = I_n^2 \cdot R_n - \text{активна потужність навантаження} \quad (2.67)$$

Підставимо (2.66) в (2.67) і отримаємо:

$$P_n = \frac{U_{11'xx}^2}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_o} = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot R_n}{((R_n + R_o) + j \cdot (X_n + X_o))^2}. \quad (2.68)$$

Зрозуміло, що якщо $X_n = -X_o$ при будь-якому значенні R_n струм $I_n \rightarrow \max$.

$$\text{Тому } P_n = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot R_n}{(R_n + R_o)^2}. \quad (2.69)$$

Візьмемо від рівняння (2.69) похідну по R_H і дорівнюємо її до нуля:

$$\frac{dP_H}{dR_H} = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot ((R_H + R_o)^2 - 2 \cdot R_H \cdot (R_H + R_o))}{(R_H + R_o)^4} = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot (R_o^2 - R_H^2)}{(R_H + R_o)^4} = 0 = \quad (2.70)$$

$$\Rightarrow R_o^2 - R_H^2 = 0 \Rightarrow R_o = R_H.$$

Тобто активна потужність P є максимальною, коли $\underline{Z}_H = \underline{Z}_H^*$ і умовами передачі максимальної активної потужності від активного двополюсника до навантаження є рівність комплексного опора \underline{Z}_H навантаження спряженому комплексу вхідного опора \underline{Z}_o^* активного двополюсника.

2.15. Резонанс у послідовному коливальному контурі

Резонансний режим – це такий режим роботи кола, що містить хоча би одну індуктивність і хоча би одну ємність, під час якого вхідний опір є чисто активним.

Розрізняють два основних резонансних режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Резонанс напруг – це такий режим роботи кола, що містить послідовно поєднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході співпадає за фазою зі вхідною напругою. Резонанс напруг відбувається в так званому послідовному коливальному контурі – рис.2.16. У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним: $X = X_L - X_C = 0$, $\underline{Z}_{вх} = R$, а сумарна реактивна потужність $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Домогтися резонансу можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Вводимо наступні поняття:

1) *резонансна частота* - частота під час резонансу ω_0 , яка знаходиться з

$$\text{умови } X_L = X_C, \quad \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \quad (2.71)$$

2) *хвильовий (характеристичний) опір* - це ємнісний або індуктивний опір

$$\text{під час резонансу, тобто } \rho = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (2.72)$$

3) *добротність контуру* - це відношення напруги на ємності чи напруги на індуктивності до вхідної напруги; показує в скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більше напруги на вході під час резонансу:

$$q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 \cdot L \cdot I}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}. \quad (2.73)$$

Під час резонансу енергія магнітного поля дорівнює енергії електричного поля і відбувається постійний перехід енергії магнітного поля в енергію електричного. Сума миттєвих значень енергії магнітного і електричного полів - це миттєва енергія електромагнітного поля:

$$w_{em} = w_m + w_e = \frac{L \cdot i^2}{2} + \frac{C \cdot u_c^2}{2}, \quad (2.74)$$

де $i = I_m \cdot \sin \omega_0 t$. Миттєва напруга на ємності:

$$\begin{aligned} u_C &= U_{Cm} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{Cm} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\frac{I_m}{\omega_0 \cdot C} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= -\rho \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Миттєва значення загального запасу електромагнітної енергії в резонансному режимі – величина постійна:

$$w_{em} = \frac{L \cdot I_m^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) + \frac{L}{C} \cdot \frac{C}{2} \cdot I_m^2 \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{L \cdot I_m^2}{2} = \frac{C \cdot U_m^2}{2}. \quad (2.76)$$

Таким чином зменшення енергії електричного поля супроводжується збільшенням енергії магнітного поля (і навпаки).

Частотні характеристики послідовного коливального контуру – це залежності різних параметрів контуру від частоти (рис.2.19):

$$\begin{aligned} X_L &= \omega \cdot L = f(\omega); \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = f(\omega); \quad X = X_L - X_C = f(\omega); \\ Z &= \sqrt{R^2 + X^2} = f(\omega); \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega); \\ U_L &= I \cdot \omega \cdot L = \frac{U \cdot \omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega); \\ U_C &= I \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{U}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Фазочастотна характеристика – це залежність кута зсуву фаз від частоти (рис.2.19):

$$\varphi = f(\omega) = \arctg \frac{\omega \cdot L - 1/\omega \cdot C}{R}. \quad (2.78)$$

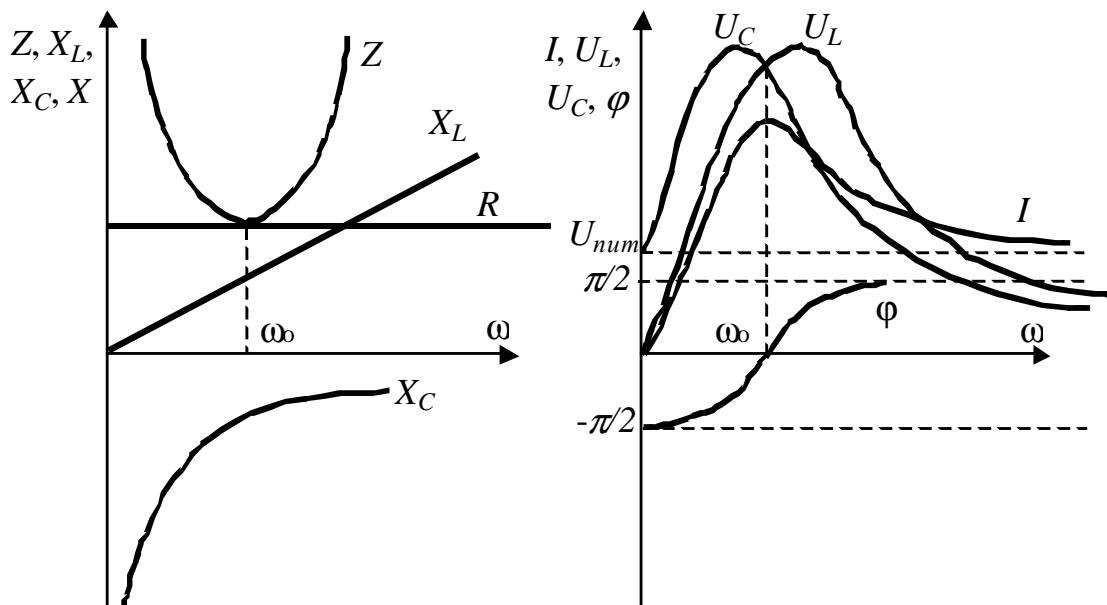


Рис.2.19

2.16. Резонанс у паралельному коливальному контурі

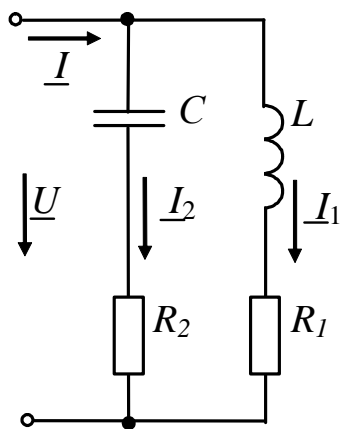


Рис.2.20

Резонанс струмів - такий режим роботи кола, що містить паралельне з'єднання ємності й індуктивності, за якого вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм співпадає за фазою з напругою на вході кола. Під час резонансу струмів струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж в загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною, реактивна потужність дорівнює нулю: $B = B_L - B_C = 0$; $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Отримати резонанс струмів можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Розглянемо реальний паралельний коливальний контур (рис.2.20), до якого прикладається синусоїдна напруга $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t)$. Знайдемо модулі струмів через провідності гілок $I = U \cdot Y$, $I_1 = U \cdot Y_1$, $I_2 = U \cdot Y_2$,

$$(2.79)$$

де $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$; $Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}$; $Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}$.

$$(2.80)$$

Активні провідності віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{R_2}{Z_2^2}. \quad (2.81)$$

$$\text{Повна активна провідність кола} - G = G_1 + G_2. \quad (2.82)$$

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{\omega \cdot L}{Z_1^2}; \quad B_2 = B_C = -\frac{1/\omega \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot Z_2^2}. \quad (2.83)$$

$$\text{Повна реактивна провідність кола} B = B_1 + B_2. \quad (2.84)$$

Під час резонансу $Y_o = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$ і тому загальний струм досягає мінімального значення - $I_o = U \cdot Y_o = U \cdot (G_1 + G_2)$. Знайдемо резонансну частоту ω_o з умови $B = 0 \Rightarrow B = B_L - B_C \Rightarrow$

$$\frac{\omega_o \cdot L}{R_1^2 + (\omega_o \cdot L)^2} = \frac{1/\omega_o \cdot C}{R_2^2 + (1/\omega_o \cdot C)^2}. \quad (2.85)$$

Таким чином резонансна частота:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (2.86)$$

З останнього виразу бачимо, що резонанс є можливим в випадках:

$$1) \text{ коли } \sqrt{\frac{L}{C}} > R_1 \text{ та } \sqrt{\frac{L}{C}} > R_2;$$

$$2) \text{ коли } \sqrt{\frac{L}{C}} < R_1 \text{ та } \sqrt{\frac{L}{C}} < R_2;$$

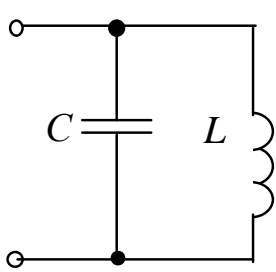


Рис.2.21

3) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2 = \rho$ - резонанс можливий за будь-якої частоти, тому що вхідний опір має активний характер.

Якщо $R_1 \approx 0$ та $R_2 = 0$, то струм $I \rightarrow 0$, $Z_{ex} \rightarrow \infty$. Конттури, у яких R_1 та R_2 є малими в порівнянні з $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

звуться *конттурами з малими втратами* – рис.2.21; для таких

контурів резонансна частота - $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$.

Добротність контуру q :

$$q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}. \quad (2.87)$$

Хвильова провідність γ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (2.88)$$

Залежності струму I і кута зсуву фаз ϕ від кутової частоти ω для реально-го контуру, що представлений на рис.2.20, зображені на рис.2.22. а залежності

параметрів B_L , B_C , B від кутової частоти ω для ідеального контуру (рис.2.21) - на рис.2.23.

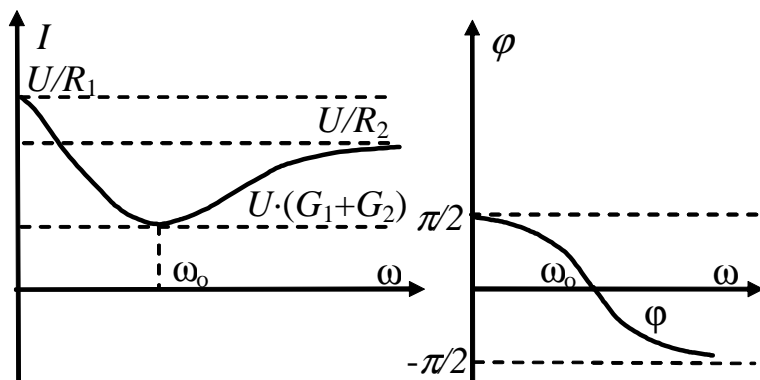


Рис.2.22

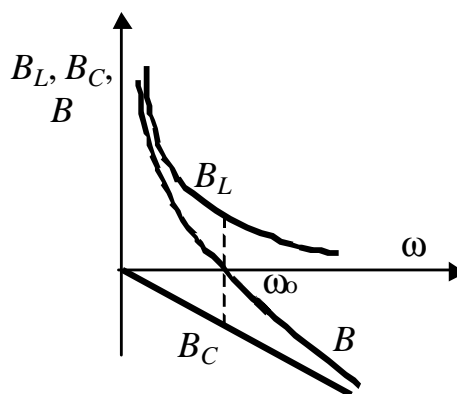


Рис.2.23

2.17. Практичне застосування резонансу

1. Підвищення коефіцієнта потужності (компенсація куту зсуву фаз).

Для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати найбільш високий коефіцієнт потужності $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I}$, тобто намагатися отримати менший зсув за фазою між струмом і напругою. Високий $\cos \varphi$ необхідний для зменшення втрат під час передачі енергії по лініях електропередач: якщо підвищувати $\cos \varphi$, то струм, від якого залежить рівень втрат в проводах, можна зменшити:

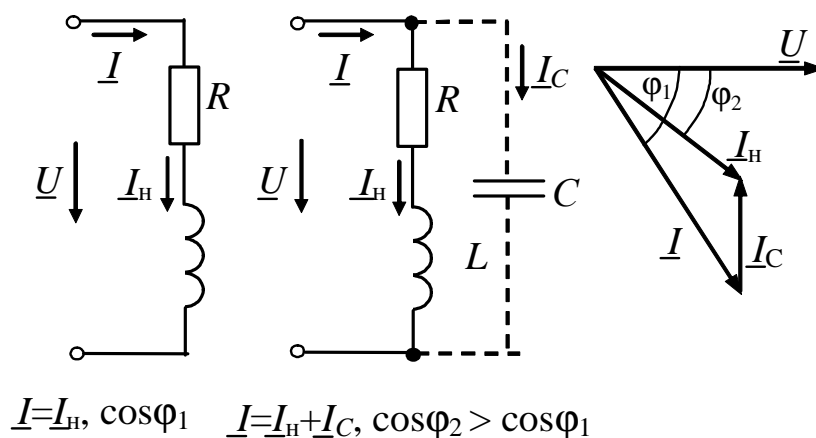


Рис.2.24

$$\cos \varphi \uparrow \Rightarrow I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi} \downarrow.$$

На практиці це виконують так: конденсатор під'єднують паралельно до індуктивних елементів (наприклад, до асинхронних двигунів) – рис.2.24 (I_n – струм навантаження).

2. У передавачах та радіоприймальних пристроях (наприклад, настройка радіоприймача на яку-небудь станцію означає досягнення резонансу його коливального контуру з частотою електромагнітних хвиль, що випромінює ця станція).

4. В електровимірювальній техніці і пристроях автоматики.

5. У ферорезонансних стабілізаторах напруги.

Але якщо резонанс не передбачений спеціально, то він може визвати небажані наслідки - пробій ізоляції і пошкодження електротехнічних пристроїв.

Розділ 3. ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

3.1. Основні поняття і класифікація

Чотириполіусник - електричне коло, що має два вхідних і два вихідних за- тискача (наприклад, трансформатор, мостова схема, і т. ін.). Поняття чотириполіусник використовують, коли треба визначити тільки вхідні й вихідні струми і

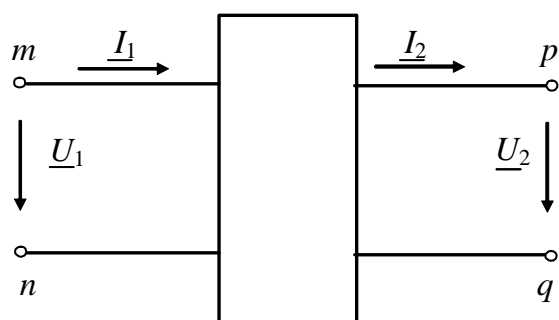


Рис.3.1

напруги на вході й виході пристрою. Умо-вне позначення наведене на рис. 3.1.

m, n – вхідні затискачі, до яких під'єднують джерело живлення;

p, q - вихідні затискачі, до яких під'єднують навантаження;

I_1, U_1 – вхідні } струми і напруги .
 I_2, U_2 – вихідні }

Таким чином, чотириполіусник – передаточна ланка між джерелом живлення і навантаженням, які можуть змінюватися, але схема внутрішнього поєднання елементів чотириполіусника, залишається незмінними.

Класифікація чотириполіусників:

- за принципом лінійності – лінійні й нелінійні;
- за схемою внутрішніх поєднань – Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис.3.2);
- активні (мають у своєму складі хоча би одне джерело енергії) і пасивні (не мають у своєму складі джерел енергії);
- автономні і неавтономні. Якщо автономний чотириполіусник відімкнути від схеми, то хоча би на одній парі затискачів існуватиме напруга;
- симетричний (якщо зміна містами джерела живлення і навантаження не змі-

нить струмів на вході й виході чотириполюсника) і несиметричний.

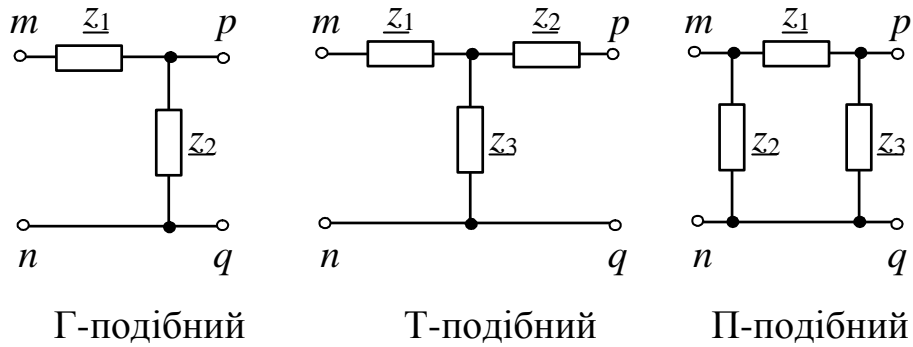


Рис.3.2

3.2. Основні рівняння чотириполюсника

Для будь-якого лінійного пасивного чотириполюсника існують основні рівняння, що пов'язують струм \underline{I}_1 і напругу \underline{U}_1 на вході зі струмом \underline{I}_2 і напругою \underline{U}_2 на виході. Розглянемо так звану А-форму запису системи основних рівнянь чотириполюсника, для якої характерними є саме такі напрямки струмів і напруг, як показано на рис.3.1:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

де A, B, C, D – комплексні коефіцієнти, що залежать від виду внутрішніх поєднань елементів, опорів, частоти; визначаються шляхами розрахунку та досліду.

Коефіцієнти чотириполюсника зв'язані між собою співвідношенням:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1 \quad (3.2)$$

Доведемо, що рівняння (3.1) існують. Відповідно до теореми про компенсацію можна замінити опір \underline{Z}_n зі струмом \underline{I}_2 на ЕРС \underline{E}_2 , що дорівнює

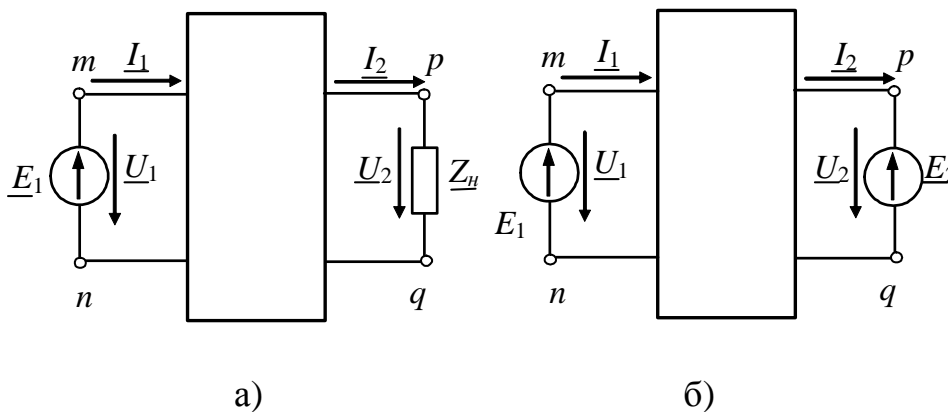


Рис.3.3

$\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_n$ і спрямована назустріч струму \underline{I}_2 (рис.3.3).

Запишемо вирази для струмів \underline{I}_1 та \underline{I}_2 , використовуючи метод накладання та поняття вхідних і взаємних провідностей.

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{12} \\ \underline{I}_2 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{21} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{22}, \end{cases} \quad (3.3)$$

де \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{22} – власні провідності вхідної і вихідної віток,

$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ – взаємні провідності вхідної (першої) і вихідної (другої) віток.

$$\text{З (3.4) виразимо } \underline{E}_1: \underline{E}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{1}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.5)$$

Підставимо отриманий вираз (3.5) в рівняння (3.3). Отримаємо:

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.6)$$

Введемо позначення:

$$A = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}; \quad B = \frac{1}{\underline{Y}_{12}}; \quad C = \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}}; \quad D = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.7)$$

Розмірності коефіцієнтів: A і D – безрозмірні величини, C – [См], B – [Ом]. Для симетричного чотириполюсника $A=D$.

З врахуванням введених позначень і того, що $\underline{U}_1 = \underline{E}_1$, $\underline{U}_2 = \underline{E}_2$ можна переписати рівняння (3.5) та (3.6) у вигляді:
$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2. \end{cases}$$

Підставимо вирази для коефіцієнтів A, B, C, D (3.7) в рівняння (3.2) та переконаємось у виконанні співвідношення (3.2):

$$A \cdot D - D \cdot C = \frac{\underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}^2} - \frac{\underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}^2} = 1. \quad (3.8)$$

Якщо поміняти місцями \underline{E}_1 і \underline{Z}_n та зробити ті ж самі операції, то отримаємо систему основних рівнянь чотириполюсника, коли його живлення здійснюється зі сторони вихідних затискачів.

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1; \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Існують також інші форми запису рівнянь чотириполюсника – H, Y, Z, G, B . Наприклад, для Y – форми напрямку струму \underline{I}_1 такий же самий, як і для A – форми, а напрямку \underline{I}_2 – протилежний A -формі. Y – форма запису має вигляд

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = Y_{11} \cdot \underline{U}_1 + Y_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = Y_{21} \cdot \underline{U}_1 + Y_{22} \cdot \underline{U}_2, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{де } Y_{11} = \frac{D}{B}; Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B}; Y_{22} = \frac{A}{B}. \quad (3.11)$$

Таким чином, якщо з чотирьох величин $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2$ дві величини є відомими, то інші визначаються з основних рівнянь чотириполюсника за умови відомих коефіцієнтів.

Форма A застосовується в теорії кругових діаграм, форми Y, Z – у теорії синтезу кіл, параметри схем заміщення транзисторів представляють в H -формі.

3.3. Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника

3.3.1. Визначення коефіцієнтів шляхом розрахунку

У цьому випадку повинні бути відомими схема з'єднання елементів і параметри цих елементів.

Отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів. Основні рівняння, як відомо, мають вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2 \end{cases}.$$

Припустимо, що струм $\underline{I}_2 = 0$ (режим холостого ходу на виході).

$$\text{Тоді } \begin{cases} \underline{U}_{1xx} = A \cdot \underline{U}_{2xx} \\ \underline{I}_{1xx} = C \cdot \underline{U}_{2xx} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1xx}}{\underline{I}_{1xx}} = \frac{A}{C} = \underline{Z}_{1xx}, \quad (3.12)$$

де \underline{Z}_{1xx} - вхідний опір чотириполюсника у режимі холостої ходи на виході.

Припустимо, що струм $\underline{U}_2 = 0$ (режим короткого замикання на виході).

$$\text{Тоді } \begin{cases} \underline{U}_{1kz} = B \cdot \underline{I}_{2kz} \\ \underline{I}_{1kz} = D \cdot \underline{I}_{2kz} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1kz}}{\underline{I}_{1kz}} = \frac{B}{D} = \underline{Z}_{1kz}, \quad (3.13)$$

де \underline{Z}_{1kz} - вхідний опір чотириполюсника у режимі короткого замикання на виході.

Основні рівняння чотириполюсника, коли його живлення здійснюється зі сторони вихідних затискачів, як відомо, мають вигляд

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1 \end{cases}.$$

Припустимо, що на вході коротке замикання - $\underline{U}_1 = 0$.

$$\text{Тоді } \begin{cases} \underline{U}_{2kz} = B \cdot \underline{I}_{1kz} \\ \underline{I}_{2kz} = A \cdot \underline{I}_{1kz} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{2kz}}{\underline{I}_{2kz}} = \frac{B}{A} = \underline{Z}_{2kz}, \quad (3.14)$$

де \underline{Z}_{2kz} - вихідний опір чотириполюсника у режимі короткого замикання на

вході при живленні зі сторони виходу.

Виразимо усі коефіцієнти через коефіцієнт A :

$$C = \frac{A}{\underline{Z}_{1\kappa 3}}; \quad B = A \cdot \underline{Z}_{2\kappa 3}; \quad D = \frac{B}{\underline{Z}_{1\kappa 3}} = \frac{A \cdot \underline{Z}_{2\kappa 3}}{\underline{Z}_{1\kappa 3}}. \quad (3.15)$$

Скористаємося рівнянням (3.2), в яке підставимо рівняння (3.15):

$$A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2\kappa 3}}{\underline{Z}_{1\kappa 3}} - A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2\kappa 3}}{\underline{Z}_{1\kappa\kappa}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\kappa 3} \cdot \underline{Z}_{1\kappa\kappa}}{\underline{Z}_{2\kappa 3} \cdot (\underline{Z}_{1\kappa\kappa} - \underline{Z}_{1\kappa 3})}} \quad (3.16)$$

Висновок: якщо відомі $\underline{Z}_{2\kappa 3}$, $\underline{Z}_{1\kappa\kappa}$, $\underline{Z}_{1\kappa 3}$, то за формулами (3.15), (3.16) знаходять усі коефіцієнти чотирьохполосника.

Розглянемо приклад.

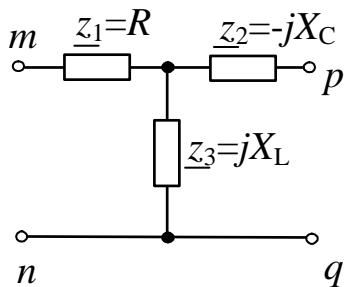


Рис.3.4

Нехай у Т-подібного чотирьохполосника (рис.3.4) відомі параметри його елементів:

$$R = 100 \text{ Ом}, \quad X_L = 200 \text{ Ом}, \quad X_C = 100 \text{ Ом}.$$

Визначимо коефіцієнти A, B, C, D .

- живлення зі сторони входу, режим холостої ходи на виході: $\underline{Z}_{1\kappa\kappa} = R + j \cdot X_L = 100 + j \cdot 200 = 224 \angle 63,4^\circ \text{ Ом};$

- живлення зі сторони входу, коротке замикання на виході:

$$\underline{Z}_{1\kappa 3} = R + \frac{j \cdot X_L \cdot (-j \cdot X_C)}{j \cdot (X_L - X_C)} = 100 + \frac{20000}{j \cdot 100} = 100 - j \cdot 200 = 224 \angle -63,4^\circ \text{ Ом};$$

- живлення зі сторони виходу, коротке замикання на вході:

$$\underline{Z}_{2\kappa 3} = -j \cdot X_C + \frac{R \cdot j \cdot X_L}{R + j \cdot X_L} = -j \cdot 100 + \frac{j \cdot 20000}{100 + j \cdot 200} = 77,3 - j \cdot 61,3 = 98,6 \angle -38,4^\circ \text{ Ом};$$

- за формулами (3.15), (3.16) визначаємо коефіцієнти:

$$A = \sqrt{\frac{224 \angle -63,4^\circ \cdot 224 \angle 63,4^\circ}{98,6 \angle -38,4^\circ \cdot (224 \angle 63,4^\circ - 224 \angle -63,4^\circ)}} = 1,128 \angle -25,8^\circ;$$

$$B = A \cdot \underline{Z}_{2\kappa 3} = 1,128 \angle -25,8^\circ \cdot 98,6 \angle -38,4^\circ = 111,22 \angle -64,2^\circ \text{ Ом};$$

$$C = A / \underline{Z}_{1\kappa\kappa} = \frac{1,128 \angle -25,8^\circ}{224 \angle 63,4^\circ} = 0,005 \angle -89,2^\circ \text{ См};$$

$$D = B / \underline{Z}_{1\kappa 3} = \frac{111,22 \angle -64,2^\circ}{224 \angle -63,4^\circ} = 0,5 \angle -0,8^\circ \text{ См}.$$

Перевірка:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1,128 \angle -25,8^\circ \cdot 0,5 \angle -0,8^\circ - 111,22 \angle -64,2^\circ \cdot 0,005 \angle -89,2^\circ = \\ = 0,564 \angle -26,4^\circ - 0,5561 \angle -153,4^\circ = 0,505 - j \cdot 0,25 + 0,5 + j \cdot 0,249 \approx 1.$$

3.3.2. Дослідний шлях визначення коефіцієнтів чотириполюсника

Схема для визначення коефіцієнтів чотириполюсника зображена на рис.3.5. Етапи визначення коефіцієнтів:

1. Дослід холостого ходу (живлення зі сторони входу чотириполюсника):

- модуль опору $Z_{1xx} = \frac{U_{1xx}}{I_{1xx}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1};$

- модуль кута зсуву фаз ϕ_{1xx} :

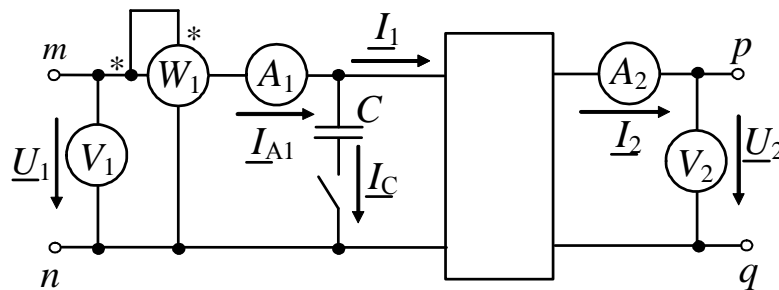


Рис.3.5

$$\phi_{1xx} = \arccos \frac{P_{1xx}}{U_{1xx} \cdot I_{1xx}} = \arccos \frac{\text{показання ваттметра } W_1}{\text{показання амперметра } A_1 \cdot \text{показання вольтметра } V_1}.$$

2. Дослід короткого замикання (живлення зі сторони входу):

- модуль опору $Z_{1кз} = \frac{U_{1кз}}{I_{1кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1};$

- модуль кута зсуву фаз $\phi_{1кз}$:

$$\phi_{1кз} = \arccos \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} \cdot I_{1кз}} = \arccos \frac{\text{показання ваттметра } W_1}{\text{показання амперметра } A_1 \cdot \text{показання вольтметра } V_1}.$$

3. Дослід короткого замикання на виході (живлення зі сторони виходу, при проведенні цього дослідження ватметр W_2 треба ввімкнути в вихідне коло):

- модуль опору $Z_{2кз} = \frac{U_{2кз}}{I_{2кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_2}{\text{показання амперметра } A_2};$

- модуль кута зсуву фаз $\phi_{2кз}$:

$$\phi_{2кз} = \arccos \frac{P_{2кз}}{U_{2кз} \cdot I_{2кз}} = \arccos \frac{\text{показання ваттметра } W_2}{\text{показання амперметра } A_2 \cdot \text{показання вольтметра } V_2}.$$

4. Досліди визначення знаків кутів ϕ_{1xx} , $\phi_{1кз}$, $\phi_{2кз}$ виконують за допомогою

ланцюжка “ключ – конденсатор”:

- якщо при замиканні ключа К показання амперметра A_1 зменшиться, то це означає, що характер кола активно-індуктивним, а кут має знак “+”;
- якщо при замиканні ключа К показання амперметра A_1 збільшиться, то це означає, що характер кола активно-ємнісним, а кут має знак “-”.

За незамкнутого ключа К: $\underline{I}_{A_1} = \underline{I}_1$, за замкнутого ключа К: $\underline{I}_{A_1} = \underline{I}_1 + \underline{I}_C$.

Суть досліду ілюструють векторні діаграми (рис.3.6).

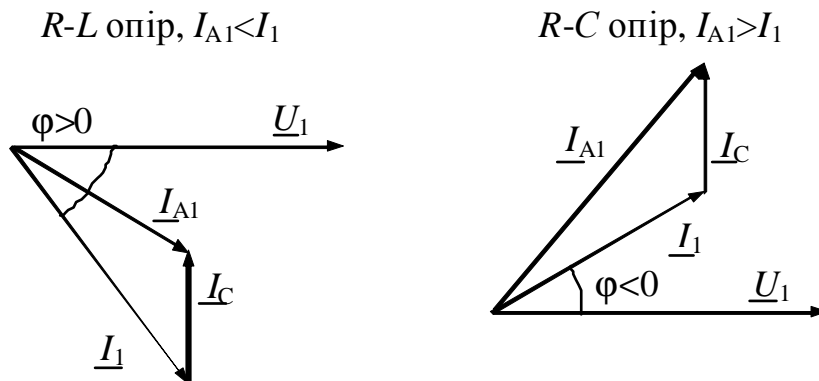


Рис.3.6.

3.4. Схеми заміщення пасивного чотириполюсника

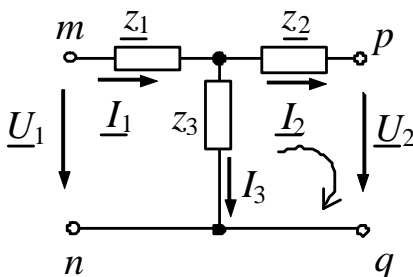


Рис.3.7

Будь-який складний чотириполюсник можна замінити більш простішим (Т-, П-подібними) і за цієї заміни три опори схеми $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ повинні бути розраховані таким чином, щоб схема заміщення давала б такі самі коефіцієнти A, B, C, D , що й вихідний чотириполюсник.

Нехай деякий складний чотириполюсник з коефіцієнтами A, B, C, D замінили Т-подібним чотириполюсником (рис.3.7). Знайдемо, якими саме мають бути опори $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, щоб коефіцієнти A, B, C, D залишались незмінними. Рівняння за першим і другим законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_3} \cdot \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{I}_2. \quad (3.18)$$

Порівняємо друге рівняння системи (3.1) з рівнянням (3.18). Зрозуміло, що

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_3}, D = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \quad (3.19)$$

Для зовнішнього контуру:

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0 \Rightarrow \quad (3.20)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2. \quad (3.21)$$

Підставимо рівняння (3.18) в (3.21):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 \Rightarrow \quad (3.22)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) + \underline{I}_2 \cdot \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right). \quad (3.23)$$

Порівняємо перше рівняння системи (3.1) з рівнянням (3.23). Зрозуміло, що

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}, B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \quad (3.24)$$

Таким чином, з (3.19) та (3.24):

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{C}, \underline{Z}_1 = \frac{A-1}{C}, \underline{Z}_2 = \frac{D-1}{C}. \quad (3.25)$$

Формули (3.25) використовуються для розрахунку $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, коли відомі коефіцієнти чотириполосника.

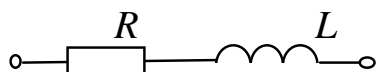
3.5. Годографи (кругові й лінійні діаграми)

Багато практичних задач потребують дослідження залежності кола від різних факторів. Поряд з аналітичними методами використовують і графічні, тобто побудову годографів (діаграм).

Годограф – геометричне місце кінців векторів, що зображують різні величини. Годографи можуть мати форму дуги кола – тоді вони називаються *круговими* діаграмами, або форму лінії – тоді це *лінійні* діаграми.

3.5.1. Лінійні діаграми

Розглянемо ділянку кола. Побудуємо геометричне місце кінців вектора, що зображує комплексний опір цієї ділянки



$$\underline{Z} = R + j \cdot X_L \text{ при зміні}$$

$$a) 0 \leq R \leq \infty;$$

Рис.3.8

б) $0 \leq X_L \leq \infty$.

Годографом у випадку а) є пряма, яка паралельна осі дійсних чисел і проходить через точку з координатами $0; X_L$ (рис.3.9, а). Годографом у випадку б) є пряма, яка паралельна осі уявних чисел і проходить через точку з координатами $R; 0$ (рис.3.9, б).

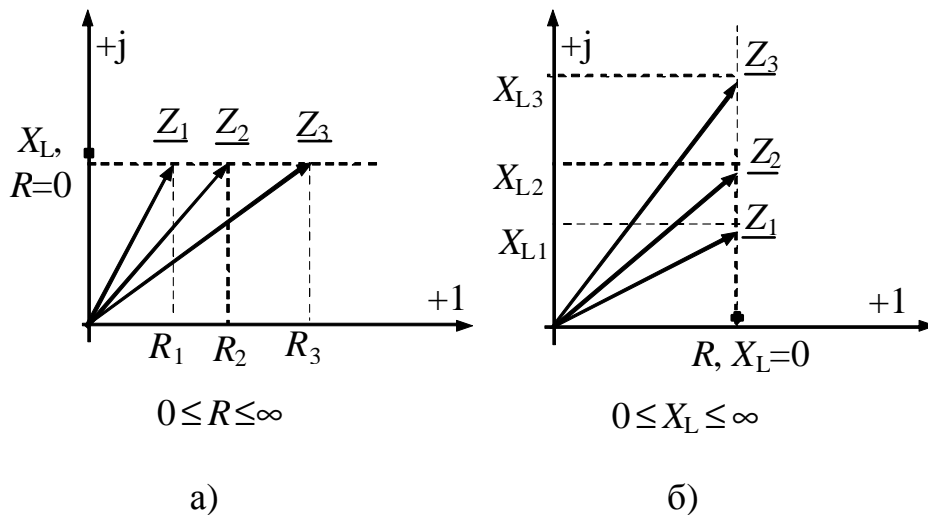


Рис.3.9

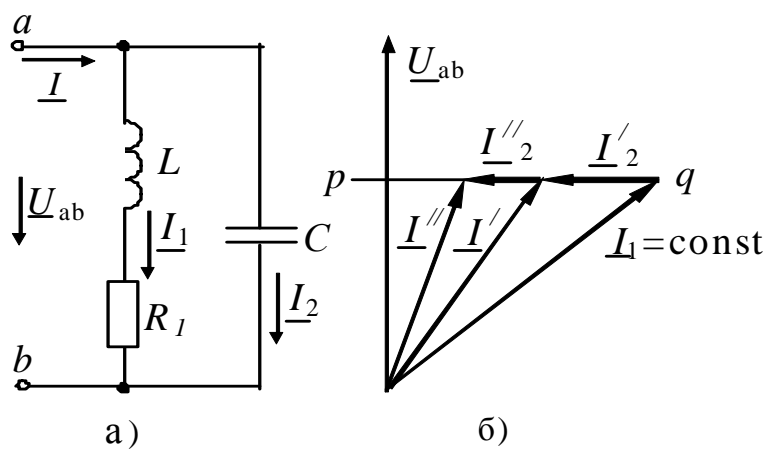


Рис.3.10

Розглянемо інший приклад побудови лінійної діаграми для струму $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ при $U_{ab} = const$. Нехай $R, X_L = const; X_C = var$ (коло – рис.3.10).

Струм \underline{I}_1 відстає від \underline{U}_{ab} на кут φ : $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$.

Струм \underline{I}_2 випереджає \underline{U}_{ab} на

кут 90° . Годограф у цьому випадку – лінія pq .

Висновок: часто деяка комплексна величина визначається рівнянням виду $\underline{N} = \underline{A} + \underline{B}$, де $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha} = const$, $\underline{B} = B \cdot e^{j\beta}$ – змінна комплексна величина, в якій $\beta = const$, а $0 \leq B \leq \infty$ (α, β – кути комплексних величин \underline{A} та \underline{B} відносно осі дійсних чисел). На комплексній площині вектор \vec{N} є сумою двох векторів \vec{A} та \vec{B} , один з яких (\vec{A}) незмінний, а в іншого (\vec{B}) – незмінний напрям і змінна довжина:

$$\vec{N} = \vec{A} + \vec{B}, \text{ де } \vec{A} = \text{const}, 0 \leq |\vec{B}| \leq \infty, \text{ в } = \text{const}.$$

$$\text{Тоді рівняння } \underline{N} = \underline{A} + \underline{B} \quad (3.26)$$

на комплексній площині є рівнянням прямої, що проходить під кутом β до осі дійсних чисел через кінець вектора \vec{A} .

3.5.2. Кругові діаграми

Розглянемо провідність ділянки кола (рис.3.8): $\underline{Y} = \frac{1}{R + j \cdot X_L}$, коли

а) $0 \leq R \leq \infty$ та $X_L = \text{const}$;

б) $0 \leq X_L \leq \infty$ та $R = \text{const}$.

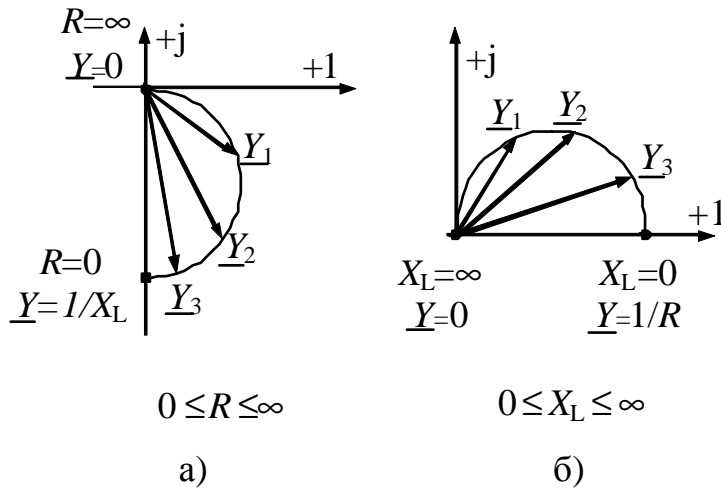


Рис.3.11

Годографом у випадку а) є дуга кола, що проходить через початок координат (рис.3.11,а). Годографом у випадку б) є дуга кола, що також проходить через початок координат (рис.3.11,б).

Висновок: зворотна величина лінійної функції $\vec{N} = \vec{A} + \vec{B}$ на комплексній

площині представлена рівнянням дуги кола, що проходить через початок координат:

$$\vec{W} = \frac{1}{\vec{N}} = \frac{1}{\vec{A} + \vec{B}} = \frac{1/\vec{A}}{1 + \frac{\vec{B}}{\vec{A}}} = \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}},$$

$$\text{де } \vec{C} = \frac{1}{\vec{A}}; \vec{B} = B \cdot e^{j \cdot \beta}; \vec{A} = A \cdot e^{j \cdot \alpha}; \quad (3.27)$$

$$\frac{\vec{B}}{\vec{A}} = \frac{B}{A} \cdot e^{j \cdot (\beta - \alpha)} = K \cdot e^{j \cdot \delta}.$$

Таким чином

$$\vec{W} = \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}} \quad \text{— основне рівняння дуги кола, що проходить через по-} \quad (3.28)$$

чаток координат на комплексній площині;

$$\vec{W} = \vec{W}_L + \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}} \quad \text{— основне рівняння дуги кола, що не проходить} \quad (3.29)$$

через початок координат на комплексній площині.

3.5.3. Кругова діаграма струму для двох послідовно поєднаних опорів

Розглянемо схему на рис.3.12, для якій $\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = \text{const}$, $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$, де $Z = \text{var}$, $\varphi = \text{const}$.

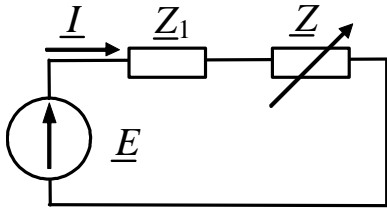


Рис.3.12

Доведемо, що струм \underline{I} буде мати кругову діаграму:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}} = \frac{\underline{E} / \underline{Z}_1}{1 + \underline{Z} / \underline{Z}_1}. \quad (3.30)$$

$$\text{Позначимо } \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} = \underline{I}_{\text{кз}}, \quad (3.31)$$

а також врахуємо, що

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_1} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j(\varphi - \varphi_1)} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j\delta}, \quad (3.32)$$

$$\text{де } \delta = \varphi - \varphi_1. \quad (3.33)$$

$$\text{Таким чином} \quad \underline{I} = \frac{\underline{I}_{\text{кз}}}{1 + \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j\delta}}. \quad (3.34)$$

Якщо порівняти (3.34) з (3.28), то зрозуміло, що це – рівняння дуги кола, що проходить через початок координат на комплексній площині.

Розділ 4. ТРИФАЗНІ КОЛА

4.1. Основні поняття і визначення

Сукупність електричних кіл, в яких діють створені спільним джерелом синусоїдні електрорушійні сили (ЕРС) однакової частоти й амплітуди, але які від-

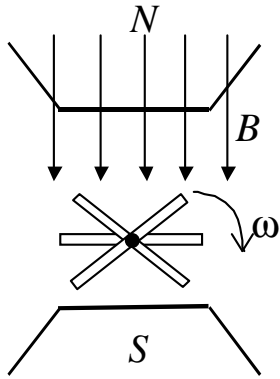


Рис.4.1

різняються один від одного на кут $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ (m – кількість фаз) –

це багатofазні симетричні системи. Багатofазні системи бувають дво-, три-, чотири-, шести-, дванадцятифазними.

Трифазна симетрична система ЕРС – сукупність трьох синусоїдних ЕРС одної частоти, що мають однакові амплітуди та зсунуті між собою на 120° . Принцип отримання трифазної системи ЕРС: в рівномірному магнітному полі з постійною кутовою швидкістю ω обертаються 3 однакові жорстко скріплені одна з одною котушки. Площини котушок зміщені у просторі одна відносно іншої на кут 120° . В кожній котушці наводяться ЕРС однакової частоти і амплі-

туди, зсунуті за кутом 120° одна відносно іншої (рис.4.1).

Графік миттєвих значень ЕРС e_A , e_B , e_C зображений на рис.4.2, а векторні діаграми – на рис.4.3.

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює “ -120° ”, а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює “ $+120^\circ$ ”, називається *прямим*; миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega \cdot t; \quad e_B = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 120^\circ); \quad e_C = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ) \quad (4.1)$$

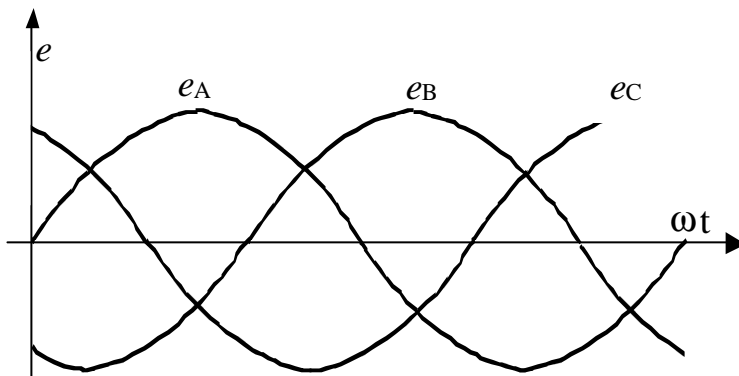


Рис.4.2

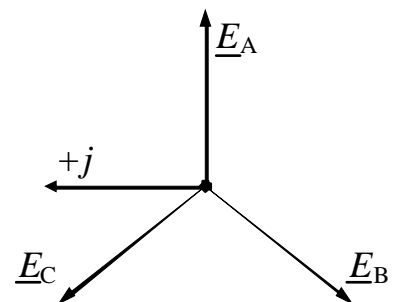


Рис.4.3

Трифазне коло – сукупність трифазної система ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень та з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Переваги трифазних систем в порівнянні з іншими багатофазними системами:

1) передача енергії на великі відстані трифазним струмом більш економічна з точки зору економії металу;

2) елементи трифазної системи, такі як асинхронний двигун, трифазний генератор і трансформатор є простими у виробництві, економічні, надійні в роботі;

3) система має властивості незмінності величини миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження в усіх трьох фазах однакове.

Усі ланки трифазного кола були розроблені російським вченим М.О. Доліво-Добровольским. Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування "початок" і "кінець". Початки позначають буквами А, В, С, а кінці - х, у, з.

4.2. Основні схеми з'єднання трифазних кіл.

Визначення лінійних і фазних величин

Основні схеми з'єднання у трифазних колах - це схеми з'єднання зіркою і трикутником.

4.2.1. З'єднання обмоток генератора зіркою

Якщо всі "початки" або всі "кінці" фазних обмоток з'єднані в один вузол (нейтральну точку чи, якщо вона заземлена, в нульову) – таке з'єднання називається *зіркою* (рис.4.4).

Проводи, що з'єднують обмотки генератора або трансформатора з навантаженням, називаються *лінійними*, а провід, що з'єднує нейтральні або нульові точки генератора і навантаження, відповідно *нейтральним* або *нульовим*.

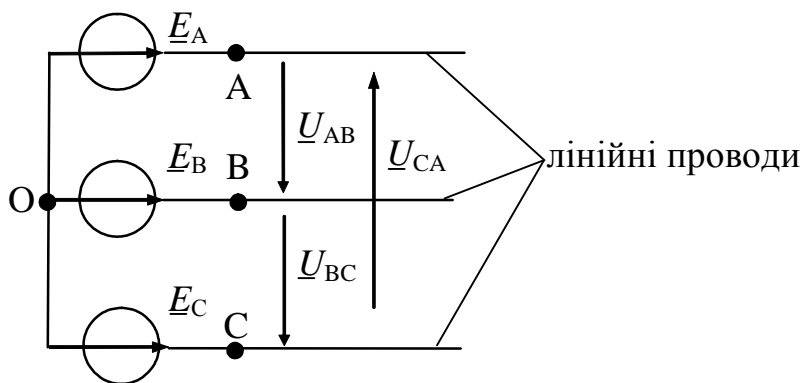


Рис.4.4

Співвідношення між фазними й лінійними напругами

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора ($\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$) або на фазних навантаженнях (\underline{U}_{aO_1} , \underline{U}_{bO_1} , \underline{U}_{cO_1} - рис.4.7) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці потенціалів між точками А, В, С або різниці фазних напруг:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}. \quad (4.2)$$

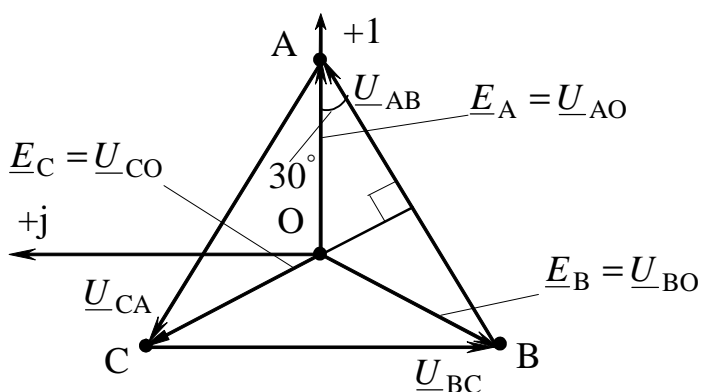


Рис.4.5.

Відповідно до виразів (4.2) побудуємо векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис.4.5), з якої видно, що при прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні й випереджають їх на 30° , тобто співвідношення між комплексами лінійних та фазних напруг мають вигляд

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j30^\circ}. \quad (4.3)$$

4.2.2. З'єднання обмоток генератора трикутником

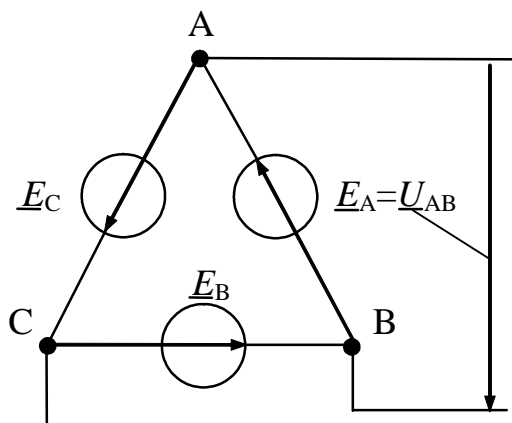


Рис.4.6.

При з'єднанні в трикутник фазні обмотки генератора, трансформатора або навантаження з'єднані один з одним послідовно таким чином, що "початок" однієї фази генератора (або навантаження) з'єднується з "кінцем" іншої фази (рис.4.6), а кожна фаза навантаження вмикається між лінійними проводами, внаслідок чого вона знаходиться під лінійною напругою. Лінійна напруга одночасно є і фазною напругою, тобто: $\underline{U}_л = \underline{U}_ф$.

Якщо до затисків генератора не під'єднане навантаження, то по обмотках не протікатиме струм, тому що:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = 0.$$

4.2.3. З'єднання обмоток генератора та трифазного навантаження за типом "зірка-зірка"

При з'єднанні "зірка-зірка" обмотки генератора й фазні навантаження поєднуються зіркою. Таке трифазне коло може бути без нейтрального проводу (трипровідна система, (рис.4.7)) або з ним (чотирипровідна система (рис.4.8)).

Проводи, що з'єднують генератор та навантаження, називаються лінійними, струми, що течуть по них – лінійні струми ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$), а напруга між лінійними проводами – лінійна напруга ($\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$). Для схем рис.4.7 і рис.4.8 фазні струми, що течуть по променях зірки, дорівнюють лінійним. Струм, що тече по нейтральному проводу (рис.4.8), – струм нейтрального або нульового проводу (\underline{I}_N).

За позитивний напрямок струмів у лінійних проводах приймається напрямок від джерела до навантаження, а в нейтральному проводі навпаки – від навантаження до джерела.

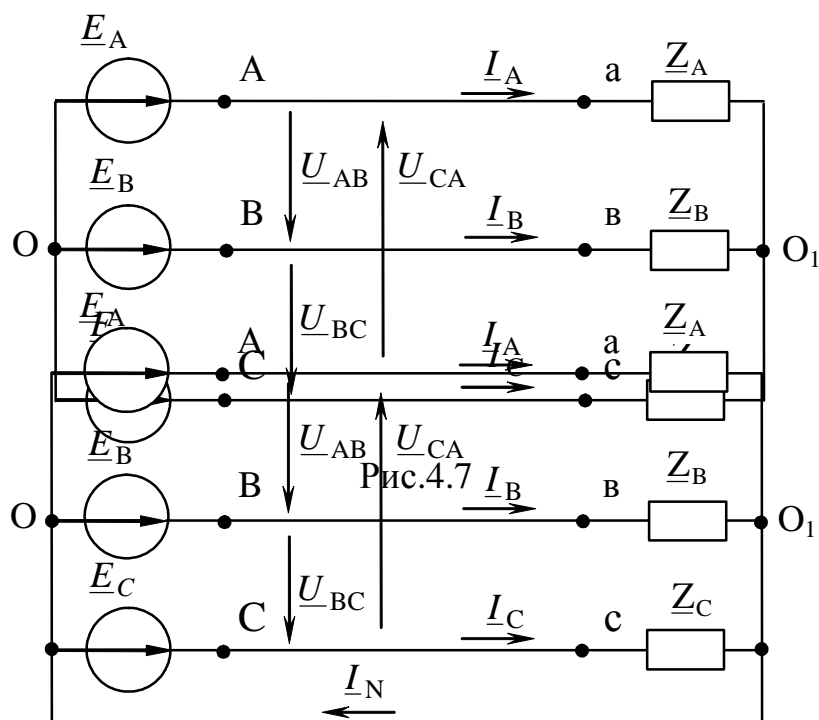


Рис.4.8

Струм у нейтральному проводі дорівнює геометричній сумі лінійних струмів (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (4.4)$$

4.2.4. З'єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом "трикутник-трикутник", "зірка-трикутник"

Схема "трикутник-трикутник" характеризується тим, що обмотки генератора і фазні навантаження з'єднані трикутником (рис.4.9), а схема "зірка-трикутник" – тим, що обмотки генератора з'єднані зіркою, а фазні навантаження – трикутником (рис.4.10).

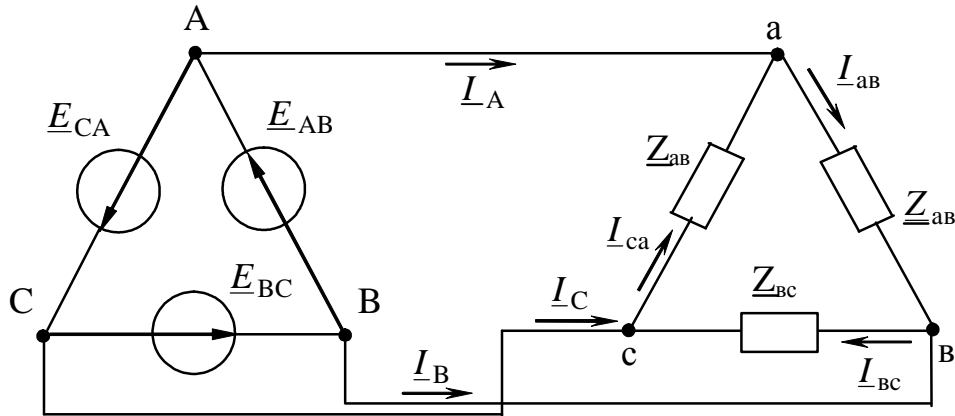


Рис.4.9

За позитивний напрямок лінійних струмів (I_A, I_B, I_C) приймається напрямок від джерела до навантаження. Позитивний напрямки фазних струмів вибирають від точки "а" до "в" (струм $I_{ав}$), від точки "в" до "с" (струм $I_{вс}$), від точки "с" до "а" (струм $I_{са}$).

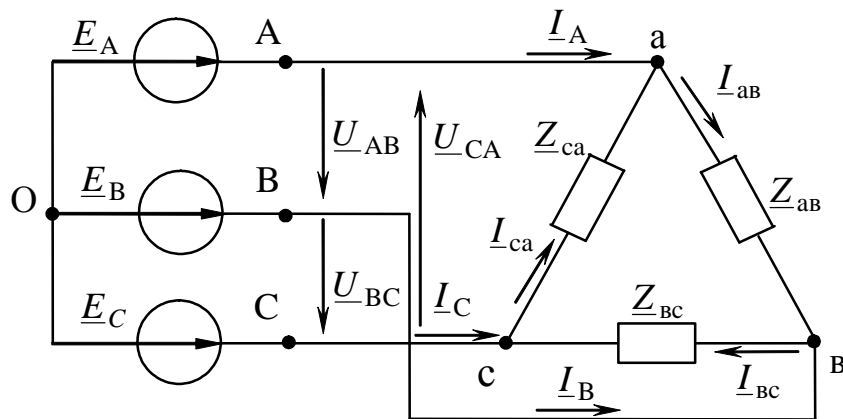


Рис.4.10.- Схема з'єднання "зірка-трикутник"

4.3. Розрахунок трифазних кіл

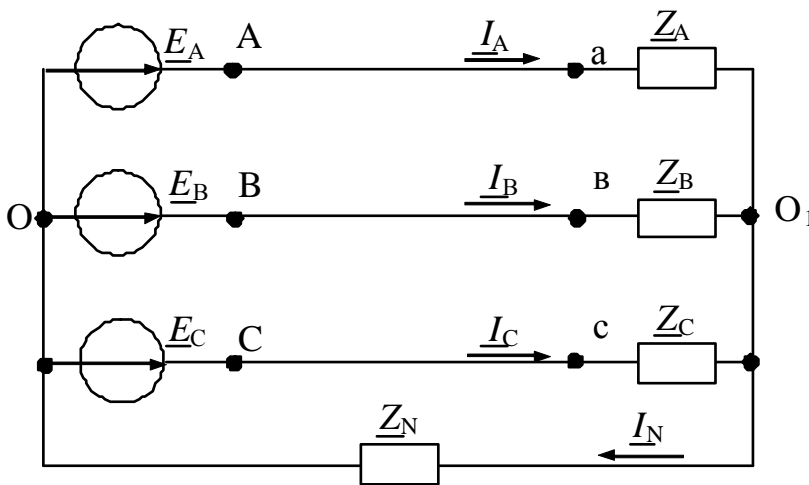
Трифазне коло є різновидом кіл синусоїдного струму і тому його розрахунок та дослідження здійснюють за допомогою методів, що розглядалися раніш. Вважаємо, що трифазна ЕРС симетрична.

4.3.1. Коло “зірка-зірка”

4.3.1.1. Несиметричне навантаження ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$),

коло з нейтральним проводом

За несиметричного навантаження, коли в нейтральному проводі є опір \underline{Z}_N



(рис.4.11), потенціали точок O і O₁ не дорівнюють один одному. Розрахунок кола здійснюють в наступній послідовності:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} , за виразом, що впливає з методу двох вузлів:

Рис.4.11

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (4.5)$$

де $\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C, \underline{Y}_N$ – комплекси фазних провідностей і провідність нейтрального проводу:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}, \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}; \quad (4.6)$$

- визначають фазні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (4.7)$$

- визначають фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_{bO_1} \cdot \underline{Y}_B; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C. \quad (4.8)$$

Струм у нейтральному проводі \underline{I}_N визначають як суму фазних струмів (4.4).

Коли в нейтральному проводі опір \underline{Z}_N відсутній і навантаження несимет-

ричне (рис.4.8) – $\underline{U}_{O_1O} = 0$, і тому фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{Y}_A; \underline{I}_B = \underline{U}_{BO} \cdot \underline{Y}_B; \underline{I}_C = \underline{U}_{CO} \cdot \underline{Y}_C, \quad (4.9)$$

а струм нейтрального проводу визначають, як і в попередньому випадку, за виразом (4.4).

4.3.1.2. Несиметричне навантаження ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$),

коло без нейтрального проводу

Якщо навантаження несиметричне та нульовий провід відсутній (рис.4.7), фазні струми установлюються таким чином, що їх сума дорівнює нулю. Внаслідок чого відбувається, як і в випадку несиметричного навантаження за наявності в нейтральному проводі опора \underline{Z}_N , викривлення симетрії фазних напруг так, що навантаження опиняється під різними, не рівними один одному (та фазним ЕРС) напругами. Потенціали точок О та O_1 не дорівнюють один одному. Розрахунок кола здійснюють так:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} :

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad (4.10)$$

- визначають фазні напруги на навантаженні за виразами (4.7);

- визначають фазні струми за виразами (4.8).

4.3.1.3. Симетричне навантаження ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$)

За симетричного навантаження в усіх випадках, що відповідають схемам рис.4.7, рис.4.8, рис.4.11, потенціали точок О і O_1 дорівнюють один одному.

Для схеми рис.4.7 та для схеми рис.4.11 відповідно:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A} = 0; \underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0, \quad (4.11)$$

$$\text{тому що } \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = 0.$$

Для схеми рис.4.8 $\underline{U}_{O_1O} = 0$, тому що нейтральний провід вирівнює потенціали точок О та O_1 . Тоді фазні струми визначають за виразами (4.8) (з урахуванням того, що $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$), вони однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° . Струм нульового проводу (для рис.4.8 та рис.4.11) – $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

4.3.2. Кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник”

4.3.2.1 Кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник” без урахування опорів підводячих проводів

Взагалі розрахунок кіл “трикутник-трикутник” (рис.4.9) і “зірка-трикутник” (рис.4.10) відрізняються тільки величиною напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{\text{ф. навантаження}}$): у випадку кола “трикутник-трикутник” - $\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{ф. генератора}}$, а у випадку кола “зірка-трикутник” - $\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{лінійне генератора}} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{\text{ф}} \cdot \angle 30^\circ$. Далі будемо розглядати коло “зірка-трикутник”, розрахунок якого проводять в наступній послідовності:

- комплекси фазних струмів визначають за виразами:

$$\underline{I}_{\text{ав}} = \frac{\underline{U}_{\text{AB}}}{\underline{Z}_{\text{ав}}} = \underline{U}_{\text{AB}} \cdot \underline{Y}_{\text{ав}}; \underline{I}_{\text{вс}} = \frac{\underline{U}_{\text{BC}}}{\underline{Z}_{\text{вс}}} = \underline{U}_{\text{BC}} \cdot \underline{Y}_{\text{вс}}; \underline{I}_{\text{са}} = \frac{\underline{U}_{\text{CA}}}{\underline{Z}_{\text{са}}} = \underline{U}_{\text{CA}} \cdot \underline{Y}_{\text{са}}, \quad (4.12)$$

де $\underline{U}_{\text{AB}}, \underline{U}_{\text{BC}}, \underline{U}_{\text{CA}}$ – лінійні напруги (4.3);

$\underline{Y}_{\text{ав}}, \underline{Y}_{\text{вс}}, \underline{Y}_{\text{са}}$ – комплекси фазних провідностей:

$$\underline{Y}_{\text{ав}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ав}}}; \underline{Y}_{\text{вс}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{вс}}}; \underline{Y}_{\text{са}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{са}}}. \quad (4.13)$$

Лінійні струми визначають за першим законом Кірхгофа для вузлів а, в, с:

$$\underline{I}_{\text{A}} = \underline{I}_{\text{ав}} - \underline{I}_{\text{са}}; \underline{I}_{\text{B}} = \underline{I}_{\text{вс}} - \underline{I}_{\text{ав}}; \underline{I}_{\text{C}} = \underline{I}_{\text{са}} - \underline{I}_{\text{вс}}. \quad (4.14)$$

При симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням

$$\varphi = \arctg \frac{X_{\text{ф}}}{R_{\text{ф}}}, \quad (4.15)$$

де $X_{\text{ф}}$ - реактивний опір навантаження;

$R_{\text{ф}}$ - активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть рівними між собою, в $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30° при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_{\text{A}} = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{\text{ав}} \angle -30^\circ; \underline{I}_{\text{B}} = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{\text{вс}} \angle -30^\circ; \underline{I}_{\text{C}} = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{\text{са}} \angle -30^\circ. \quad (4.16)$$

Таким чином, при симетричному навантаженні фаз розрахунок трифазного кола можна звести до розрахунку однієї фази.

При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми.

4.3.2.2. Кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник” з урахуванням опорів підводячих проводів

Розглянемо загальний випадок такого кола, коли опори в лініях не дорівнюють один одному ($\underline{Z}_{\text{ла}} \neq \underline{Z}_{\text{лв}} \neq \underline{Z}_{\text{лс}}$) і навантаження фаз несиметричне (рис.4.12).

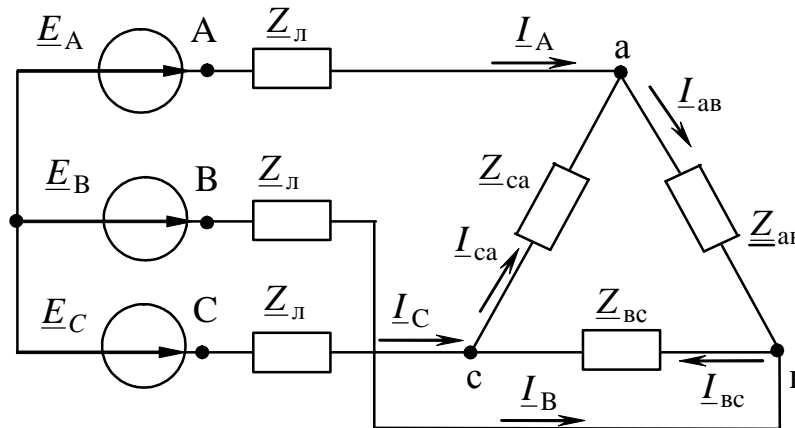


Рис.4.12

Розрахунок такої схеми слід виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою. Опори променів зірки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_a &= \frac{\underline{Z}_{\text{аб}} \cdot \underline{Z}_{\text{са}}}{\underline{Z}_{\text{аб}} + \underline{Z}_{\text{вс}} + \underline{Z}_{\text{са}}}; \quad \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{\text{вс}} \cdot \underline{Z}_{\text{аб}}}{\underline{Z}_{\text{аб}} + \underline{Z}_{\text{вс}} + \underline{Z}_{\text{са}}}; \\ \underline{Z}'_c &= \frac{\underline{Z}_{\text{са}} \cdot \underline{Z}_{\text{вс}}}{\underline{Z}_{\text{аб}} + \underline{Z}_{\text{вс}} + \underline{Z}_{\text{са}}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{\text{аб}} = \underline{Z}_{\text{вс}} = \underline{Z}_{\text{са}} = \underline{Z}_{\text{ф}}$, то опір променів еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}'_a = \underline{Z}'_b = \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{\text{ф}}}{3}. \quad (4.18)$$

У результаті перетворення одержуємо еквівалентну схему, зображену на рис. 4.13, лінійні струми якої ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) в загальному випадку розраховується як у схемі "зірка-зірка" при несиметричному навантаженні, а саме:

- визначають повні опори ($\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$) та провідності ($\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$) кожної фази, враховуючи що опори з'єднувальних проводів ввімкнені послідовно з опорами відповідних променів еквівалентної зірки:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_A &= \underline{Z}'_a + \underline{Z}_{ла}; \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}; \underline{Z}_B = \underline{Z}'_b + \underline{Z}_{лв}; \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}; \\ \underline{Z}_C &= \underline{Z}'_c + \underline{Z}_{лс}; \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}.\end{aligned}\quad (4.19)$$

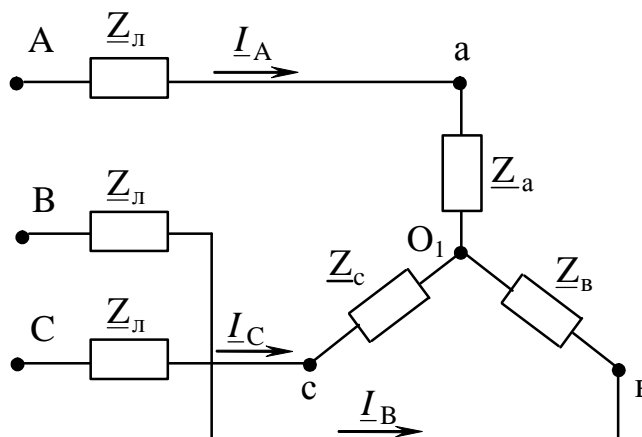


Рис.4.13

- визначають напругу зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}$;
- визначають лінійні струми $\underline{I}_A = (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_A$, $\underline{I}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_B$, $\underline{I}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_C$.

Фазні струми в навантаженнях $\underline{Z}_{ав}$; $\underline{Z}_{вс}$; $\underline{Z}_{са}$ вихідної схеми (рис.4.12) визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_{ав} = \frac{\underline{U}_{ав}}{\underline{Z}_{ав}}; \underline{I}_{вс} = \frac{\underline{U}_{вс}}{\underline{Z}_{вс}}; \underline{I}_{са} = \frac{\underline{U}_{са}}{\underline{Z}_{са}}, \quad (4.20)$$

де $\underline{U}_{ав}$; $\underline{U}_{вс}$; $\underline{U}_{са}$ – лінійні напруги на навантаженні:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ав} &= \underline{U}_{aO_1} - \underline{U}_{BO_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_b; \\ \underline{U}_{вс} &= \underline{U}_{BO_1} - \underline{U}_{CO_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_b - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c; \\ \underline{U}_{са} &= \underline{U}_{CO_1} - \underline{U}_{aO_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a.\end{aligned}\quad (4.21)$$

4.4. Аварійні режими в трифазних колах

4.4.1. Схема "зірка-зірка"

Обрив лінійного проводу в колі "зірка-зірка" з нейтральним проводом

У цьому випадку (рис.4.14) $\underline{I}_A = 0$, а фазні струми $\underline{I}_B, \underline{I}_C$ залишаються тими ж, що і в колі "зірка-зірка", тобто: $\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BO}}{\underline{Z}_B}$, $\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CO}}{\underline{Z}_C}$. (4.22)

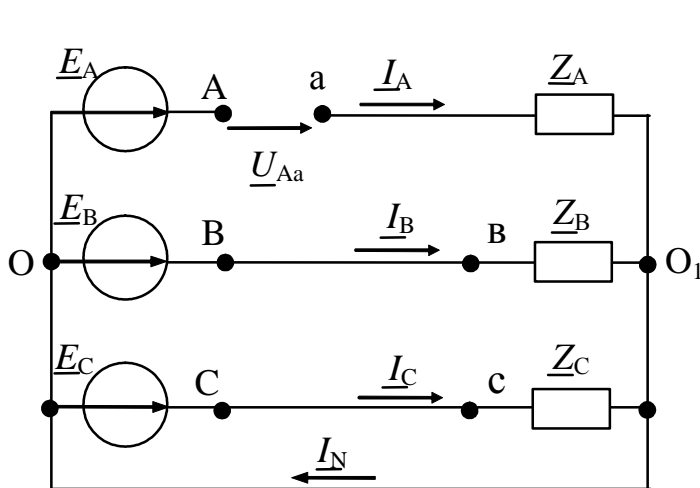


Рис.4.14

Обрив лінійного проводу в схемі "зірка-зірка" без нейтрального проводу
(у схемі рис.4.14 треба вимкнути нейтральний провід)

У цьому випадку лінійна напруга \underline{U}_{BC} прикладається до послідовного з'єднання двох опорів \underline{Z}_B і \underline{Z}_C ; і якщо $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C$ вона (напруга) рівномірно розподіляється між цими опорами. Струми: $\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_C}$. (4.26)

Напруга на затискачах розриву дорівнює:

$$\underline{U}_{Aa} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B - \underline{E}_B + \underline{E}_A = \underline{U}_{AB} + \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B, \quad (4.27)$$

$$\text{і якщо } \underline{Z}_B = \underline{Z}_C, \text{ то } \underline{U}_{Aa} = 1,5 \cdot \underline{U}_{AO}. \quad (4.28)$$

$$\text{Напруга зміщення нейтралі: } \underline{U}_{O_1O} = \underline{U}_{BO} - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B. \quad (4.29)$$

Коротке замикання у фазі

(схема "зірка-зірка" без нульового проводу - рис.4.15)

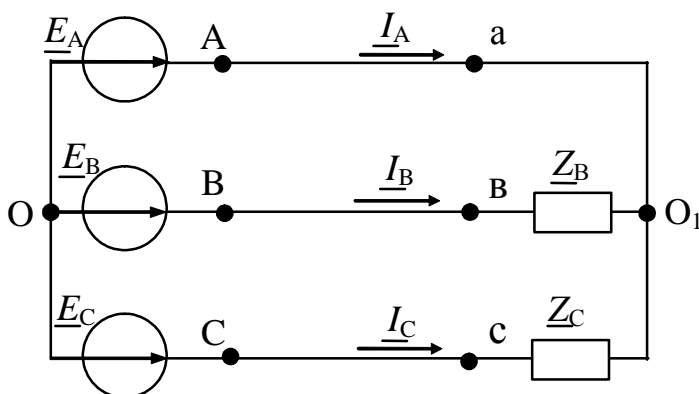


Рис.4.15

Струм в нульовому проводі:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (4.23)$$

Фазні напруги на наванта-

женні: $\underline{U}_{aO_1} = 0, \underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO},$

$$\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO}. \quad (4.24)$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює фазній напрузі:

$$\underline{U}_{Aa} = \underline{U}_{AO}. \quad (4.25)$$

Напруга зміщення нейтралі:

$$\underline{U}_{O_1O} = \underline{E}_A. \quad (4.30)$$

Напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{aO_1} = 0, \underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{O_1O},$$

$$\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{O_1O}. \quad (4.31)$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BO1}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CO1}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C). \quad (4.32)$$

4.4.2. Схема "зірка-трикутник"

Обрив одного з фазних проводів (рис.4.16)

При обриві одного з фазних проводів, наприклад, у фазі "bc" (рис.4.16), фазний струм $\underline{I}_{bc} = 0$, струми \underline{I}_{ca} та \underline{I}_{ab} залишаються без змін. Тому лінійний струм $\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$ зберігає своє значення, а лінійні струми \underline{I}_B та \underline{I}_C змінюються: $\underline{I}_B = -\underline{I}_{ab}$; $\underline{I}_C = \underline{I}_{ca}$. Таким чином, зміна навантаження в одній з фаз зумовлює одночасну зміну двох лінійних струмів і не впливає на величину фазних напруг, струмів двох інших фаз і на величину третього лінійного струму.

Обрив лінійного проводу у фазі A (рис.4.17)

При обриві одного з лінійних проводів, наприклад, у фазі "A", режим роботи схеми змінюється. Опір фази "bc" буде, як і раніше, знаходитися під нормальною лінійною напругою \underline{U}_{BC} , струм \underline{I}_{bc} у цій фазі не зміниться. Опори фаз "ab" і "ca" виявляться послідовно з'єднаними та увімкненими до напруги $-\underline{U}_{BC}$.

Якщо $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ca}$, то напруга $-\underline{U}_{BC}$ розподілиться між ними порівну, а якщо $\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{ca}$, то напруга $-\underline{U}_{BC}$ розподілиться прямо пропорційно величинам цих опорів, при цьому у фазах "ab" і "ca" протікатиме один і той же струм:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ca} = \frac{-\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ca}}. \quad (4.33)$$

Лінійні струми визначаються так:

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_A = 0. \quad (4.34)$$

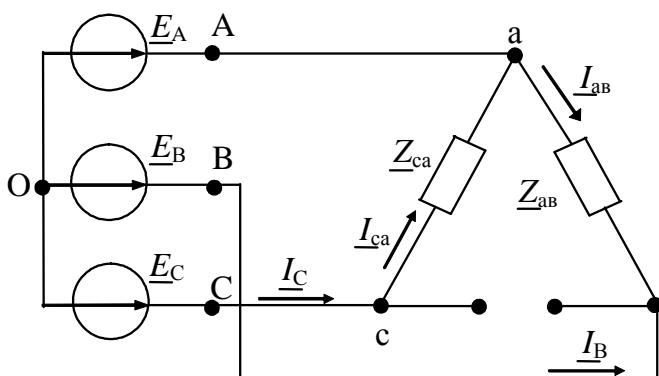


рис.4.16

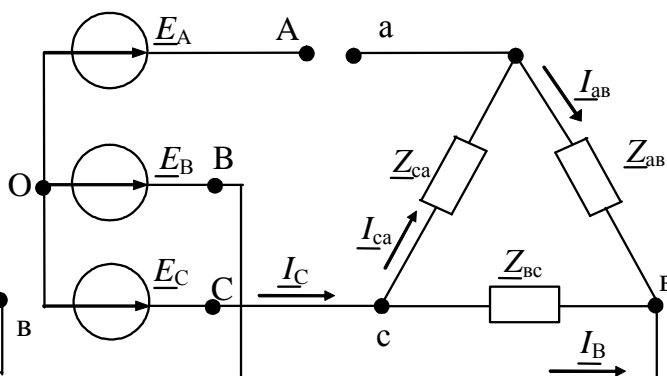


рис.4.17

Розділ 5. КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ

5.1. Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності

Якщо зміна струму в одному елементі кола призводить до появи ЕРС в іншому елементі кола, то говорять, що ці два елементи *індуктивно зв'язані*, а ЕРС, що виникає при цьому, називається ЕРС взаємної індукції (\mathcal{E}_M). Кола, в яких крім ЕРС самоіндукції наводяться ЕРС взаємної індукції, називаються *індуктивно або магнітозв'язаними колами*.

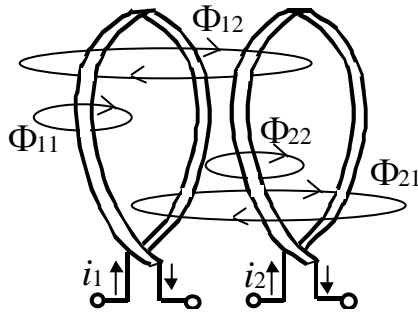


Рис.5.1

(Примітка: явище самоіндукції – явище наведення в якомусь контурі ЕРС при зміні струму, що протікає по цьому ж контуру)

Нехай є дві котушки (рис.5.1), умовно представлені у вигляді витків і віддалені одна від одної на деяку відстань. По котушках протікають синусоїдні струми i_1 і i_2 . Витки 1-ї котушки зчеплені з магнітним потоком самоіндукції Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad (5.1)$$

де Φ_{11} – частина магнітного потоку Φ_1 , який замикається, проходячи тільки через перший контур;

Φ_{12} – частина потоку Φ_1 , який замикається, проходячи через другий контур.

$$\text{Аналогічно для другого контуру: } \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (5.2)$$

Зрозуміло, що кожна котушка зчеплена з двома магнітними потоками: самоіндукції і взаємоіндукції.

Повне потокозчеплення 1-го і 2-го контурів:

$$\Psi_{1п} = w_1 \cdot (\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \Psi_{11} \pm \Psi_{21}, \quad \Psi_{2п} = w_2 \cdot (\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}, \quad (5.3)$$

де w_1, w_2 – число витків 1 і 2 контурів;

Знак «+» у формулі (5.3) ставиться в тому випадку, коли потік самоіндукції (створюється струм ом власного контуру) і потік взаємної індукції направлені узгоджено.

Введемо поняття *взаємної індуктивності* M (Гн), яка дозволяє при розрахунках врахувати явище взаємоіндукції і явище накопичення енергії в магнітному полі індуктивно зв'язаних котушок. Для нашого випадку:

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}. \quad (5.4)$$

Взаємна індуктивність M залежить від взаємного розташування, геометричних розмірів котушок, числа витків і від μ (відносна магнітна проникність осердя); вона може бути визначена за допомогою досліду.

Коефіцієнт індуктивного зв'язку між двома контурами з індуктивностями L_1 і L_2 і взаємною індуктивністю M :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (5.5)$$

Зрозуміло, що $k \leq 1$. Коефіцієнт індуктивного зв'язку $k = 1$, якщо весь потік, що створюється 1-м контуром, буде зчеплений з другим контуром і залежить від взаємного розташування контурів (зміна індуктивного зв'язку досягається переміщенням однієї котушки відносно іншої).

Відмітимо, що M може бути більше L_1 (або L_2), але не може бути більше і L_1 , і L_2 одночасно.

5.2. Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок

При складанні рівнянь для індуктивно зв'язаних кіл необхідно знати узгоджено або зустрічно направлені потоки самоіндукції і взаємоіндукції (або ще говорять: *узгоджено* або *зустрічно* включені котушки), тобто знати напрям намотування витків котушок і напрям струму в них.

Котушки включені узгоджено, якщо струми в них однаково орієнтовані щодо однойменних затискачів, які на схемах позначаються «*» або «•». При узгодженому включенні котушок ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції складаються.

На прикладі рис.5.2 розглянемо методику складання рівнянь за законами Кірхгофа для розрахунку магнітозв'язаних кіл (включення котушок – узгоджене):

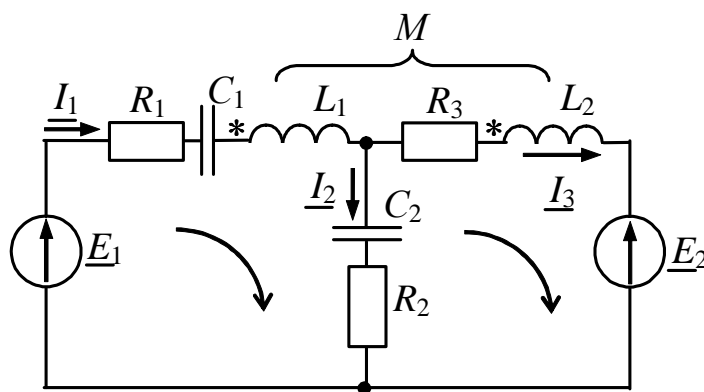


Рис.5.2

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_1 \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1 dt + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt + i_2 \cdot R_2 = e_1, \\ i_3 \cdot R_3 + L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt - i_2 \cdot R_2 = e_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

де $L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt}$, $L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}$ - падіння напруги в 1 і 2 котушках відповідно.

Перейдемо до системи рівнянь у комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 \cdot \left(R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_1} + j \cdot \omega L_1 \right) + \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 \cdot j\omega M = \underline{E}_1 \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_3 \cdot (R_3 + j \cdot \omega L_2) - \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) = \underline{E}_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Величина $X_M = \omega \cdot M$ - реактивний опір взаємної індуктивності, Ом.

Величина $\underline{Z} = j \cdot \omega \cdot M$ - комплексний опір взаємної індуктивності.

5.3. Визначення взаємної індуктивності

Розглянемо рис.5.3 - послідовне включення двох індуктивно зв'язаних котушок.

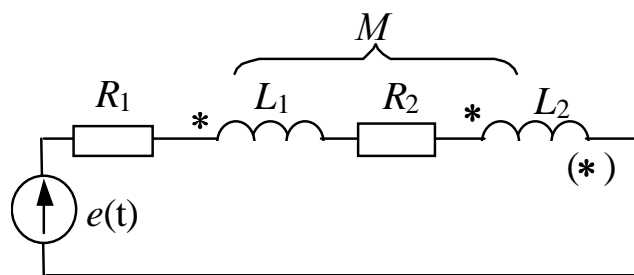


Рис.5.3

Нехай включення котушок – узгоджене. За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e, \quad (5.8)$$

$$\text{або: } \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M)] = \underline{E} \Rightarrow \quad (5.9)$$

Таким чином, комплексний опір кола в цьому випадку

$$\underline{Z}_{\text{узг.}} = R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j\omega \cdot X_{\text{зг}} \dots \quad (5.10)$$

Нехай включення котушок – зустрічне (*). За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e, \quad (5.11)$$

$$\text{або: } \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M)] = \underline{E}. \quad (5.12)$$

Комплексний опір кола в цьому випадку:

$$\underline{Z}_{\text{зустр.}} = R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j\omega \cdot X_{\text{зустр.}}. \quad (5.13)$$

Отже $X_{\text{узг.}} - X_{\text{зустр.}} = 4 \cdot \omega \cdot M = 4 \cdot X_M$, звідки:

$$M = \frac{X_{\text{узг.}} - X_{\text{зустр.}}}{4 \cdot \omega}. \quad (5.14)$$

Вираз (14) використовується для визначення шляхом досліду взаємної індуктивності M .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник.- М.: Гардарики, 2002 – 640 с.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П.А. и др. Основы теории цепей: Учебник для вузов - М.: Энергоатомиздат, 1989– 528 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник. - М.: Гардарики, 2001 – 317 с.
4. Перхач В.С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола. - К: Вища школа, 1992 – 439 с.
5. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. 4-е изд., дополненное для самостоятельного изучения курса. - Издательство «Питер», 2004 (т. 1 – 462 с., т. 2 – 575 с., т. 3 – 376 с.).
6. М.П. Рибалко, В.О.Есауленко, В.І. Костенко. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола: Підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003 -513
7. Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка: теорія і практикум: Підручник. – К.: Каравела, 2004 - 440 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**Форкун Яна Борисівна,
Самошкін Володимир Петрович,
Капустін Геннадій Валентинович,
Юрченко Світлана Марківна**

Текст лекцій

з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»

частина I

(для студентів усіх форм навчання та слухачів другої вищої освіти
напрямків 6.050701 «Електротехніка та електротехнології»,
6.050702 «Електромеханіка»)

Редактор: М.З. Аляб'єв

Комп'ютерний набір і верстка: Я.Б. Форкун

План 2007, поз. 13

Підп. до друку 27.08.2007 р.

Формат 60x84 1/16

Друк на ризографі

Ум. друк. арк. 3,0

Зам. №

Тираж 150 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 731 від 19.12.2001